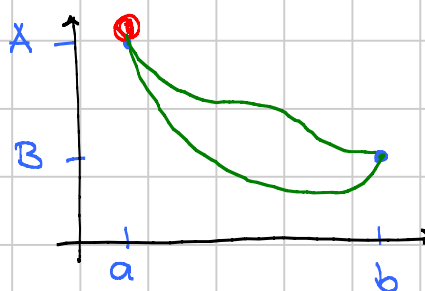


BRACHISTOCRONA

Problema: trovare la forma di una guida $u(x)$ tale una pallina seguendo la guida vada da (a, A) a (b, B) nel minor tempo possibile.



La soluzione non è ovvia, e non è detto nemmeno che non converga scendere sotto B.

1 Descrizione del modello

$u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è la guida

$(x(t), u(x(t))) \quad t \in [0, T]$ percorso della pallina

$$x(0) = a \quad x(T) = b$$

$$y(0) = A \quad y(T) = B$$

Calcolare la velocità della pallina al tempo t : conservazione dell'energia cinetica + potenziale

$$\underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{cinetico}} + \underbrace{g u(x(t))}_{\text{potenziale}} = \frac{1}{2} m \cdot 0^2 + g A$$

↑
parte ferma

Quindi

$$v^2(t) = g [A - u(x(t))] \frac{2}{m}$$

"

$$\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = \dot{x}(t)^2 + u'(x(t))^2 \dot{x}(t)^2$$

Da questa ricaviamo

$$\dot{x}(t)^2 = \frac{2g}{m} \frac{A - u(x(t))}{1 + \dot{u}(x(t))^2}$$

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2g}{m}} \sqrt{\frac{A - u(x(t))}{1 + \dot{u}(x(t))^2}}$$

Divido per la radice ed integro su $[0, T]$

$$\int_0^T \dot{x}(t) \sqrt{\frac{1 + \dot{u}(x(t))^2}{A - u(x(t))}} dt = \int_0^T \sqrt{\frac{2g}{m}} dt$$

" $x(t) = x$ " "

$$\int_a^b \sqrt{\frac{1 + \dot{u}(x)^2}{A - u(x)}} dx = T \cdot \sqrt{\frac{2g}{m}}$$

Conclusione : minimizzare T vuol dire trovare

$$\min \left\{ \int_a^b \sqrt{\frac{1 + \dot{u}^2}{A - u}} dx : u(a) = A, u(b) = B \right\}$$

Funzionale integrale con Lagrangiana

$$L(x, s, p) := \sqrt{\frac{1 + p^2}{A - s}}$$

Brutte notizie:

→ l'integrale può essere improprio (denominatore)

→ la crescita in p è solo lineare.

— o — o —

[2] Soluzione brutale dell'eq. di Eulero

Partiamo da (ELE) in forma Erdmann

$$\dot{u} L_p(u, \dot{u}) = c + L(u, \dot{u})$$

$$\frac{\dot{u}^2}{\sqrt{1+\dot{u}^2} \sqrt{A-u}} = c + \frac{\sqrt{1+\dot{u}^2}}{\sqrt{A-u}}$$

Conti brutali: $\cancel{\dot{u}^2} = c \sqrt{1+\dot{u}^2} \sqrt{A-u} + 1 + \cancel{\dot{u}^2}$

$$\sqrt{1+\dot{u}^2} \cdot \sqrt{A-u} = c \leftarrow \text{può di cambiare } c$$

$$1+\dot{u}^2 = \frac{c^2}{A-u} \quad \leadsto \quad \dot{u}^2 = \frac{c^2}{A-u} - 1$$

$$\leadsto \dot{u} = \pm \sqrt{\frac{c^2}{A-u} - 1} \quad (\text{eq. diff. a var. separabili})$$

$$\frac{du}{\sqrt{\frac{c^2}{A-u} - 1}} = \pm dx \quad \leadsto \text{integro}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2}{A-u} - 1}} du = \pm x + k$$

Pongo $A-u = c^2 \sin^2 z$
 $-du = 2c^2 \sin z \cos z$

$$\int \frac{2c^2 \sin z \cos z}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 z} - 1}} dz = -2c^2 \int \sin^2 z dz$$

$$c^2 \int 2 \sin^2 z dz = \pm x + k$$

$$c^2 \int (1 - \cos(2z)) dz = c^2 z - \frac{c^2}{2} \sin(2z) = \frac{c^2}{2} (2z - \sin(2z))$$

Pongo $2z = \theta$ e ho ottenuto che

$$\pm x + k = \frac{c^2}{2} (\theta - \sin \theta)$$

$$u = A - \frac{c^2}{2} \sin^2 \theta = A - \frac{c^2}{2} (1 - \cos \theta)$$

Ho espresso x e u in funzione di un parametro θ

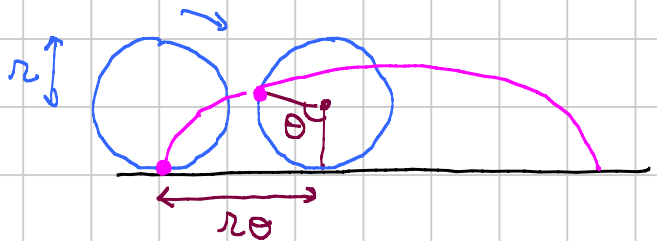
$$x = \frac{c^2}{2} (\theta - \sin \theta) - k$$

$$u = A - \frac{c^2}{2} (1 - \cos \theta)$$

3 Famiglie di cicloidi Consideriamo le curve del tipo

$$\begin{cases} x = r (\theta - \sin \theta) \\ u = r (1 - \cos \theta) \end{cases}$$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$



La traiettoria descritta dal punto durante la rotazione ha le coordinate date dalla formula di sopra (θ = angolo di rotazione)

4 Tentativo di sistemazione rigorosa

Osservo che la funzione $\psi(\theta) = \theta - \sin \theta$ è monotona ed invertibile come funzione

$$\psi: [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$$

Sia $g(x)$ la sua inversa. Poniamo $r = \frac{c^2}{2}$

$$x = r (\theta - \sin \theta) - k$$

$$u = A - r (1 - \cos \theta)$$

$$u(x) = A - r \left[1 - \cos \left(g \left(\frac{x+k}{r} \right) \right) \right]$$

Teorema Per ogni valore ammissibile dei parametri (A, k, r) la funzione $u(x)$ definita sopra risolve (ELE) del funzionale.

Dim. Calcolo le derivate e sostituisco.

5 Verifica delle BC Voglio trovare r e k in modo che

$$u(a) = A \quad \text{e} \quad u(b) = B$$

Uso la descrizione parametrica e cerco r e θ_0 in modo tale che

$$\theta = 0 \quad \begin{cases} a = -k \\ A = A \end{cases} \quad \theta = \theta_0 \quad \begin{cases} b = r(\theta_0 - \sin \theta_0) - k \\ B = A - r(1 - \cos \theta_0) \end{cases}$$

$$b - a = r(\theta_0 - \sin \theta_0)$$

$$A - B = r(1 - \cos \theta_0)$$

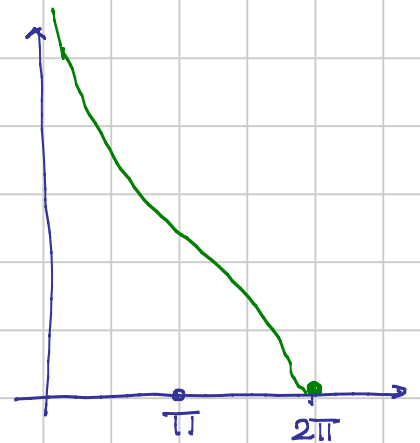
Dividendo tra $\frac{1 - \cos \theta_0}{\theta_0 - \sin \theta_0} = \boxed{\frac{A - B}{b - a}} > 0$

Considero la funzione

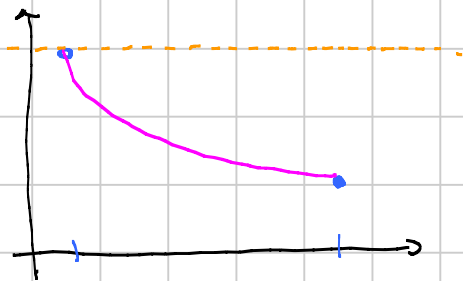
$$\psi(\theta) := \frac{1 - \cos \theta}{\theta - \sin \theta} \quad \theta \in (0, 2\pi)$$

Miracolo di Analisi 1 (vedi lezioni 2015/16) : $\psi'(\theta) < 0$ sempre, quindi esiste un unico θ_0 che va bene.

Nota θ_0 , trovo $r \leadsto$ esiste un'unica cicloide che passa per le DBC assegnate!



Oss. La cicloide può avere minimo + basso del valore B?



Tutto dipende dall'essere $\theta_0 \in (\pi, 2\pi)$ il che succede non appena

$$\frac{A-B}{b-a} < \psi(\pi) = \frac{2}{\pi}$$

6 Dimostrazione della unicità (dell'unica cicloide trovata)

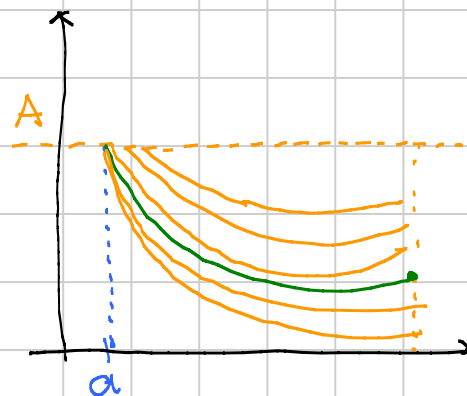
Due dimostrazioni

1 - Via campi di Weierstrass

Posso foliare il quadrante

$$x \geq a, u \leq A$$

con cicloidi, quindi soluzioni di ELE (uso quelle che emanano da (a, A) con raggi differenti.



Queste non si intersecano e formano un campo di W.

Per concludere basta (W^+) che è gratis per la convessità in p della Lagrangiana.

2 - Via trucco di convessità

$$F(u) = \int_a^b \sqrt{\frac{1+u'^2}{A-u}} dx$$

Cambio variabile ponendo

$$A-u = \frac{1}{2} v^2$$

Riscrivo il funzionale nella nuova variabile:

$-\ddot{u} = v\dot{v}$, quindi

$$\begin{aligned}\hat{F}(v) &= \int_a^b \sqrt{\frac{1+v^2\dot{v}^2}{v^2}} \cdot \sqrt{2} \, dx \\ &= \int_a^b \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{1}{v^2}} \, dx \quad (\text{a meno di } \sqrt{2})\end{aligned}$$

Ora con qualche conto si vede che

$$L(s,p) := \sqrt{p^2 + \frac{1}{s^2}}$$

è convessa nella coppia (s,p) !!!

Quindi le sol. di (ELE) (e le cicloidi riscritte nella variabile v lo sono) sono punti di minimo.

— o — o —