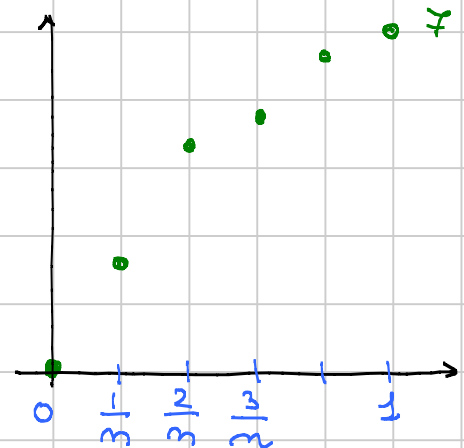


PASSAGGI DISCRETO $\rightarrow$ CONTINUOApprossimazione delle derivate con rapporti incrementali

$$F(u) = \int_0^1 (\dot{u}^2 + u^2)$$

Mettiamo di avere DBC $u(0) = 0$, $u(1) = 7$ Fissato un intero n positivo, divido $[0, 1]$ in n parti uguali, e penso u definita solo nei punti $\frac{k}{n}$ con $k=0, \dots, n$ Posso pensare di approssimare $\dot{u}$ con il rapporto incrementale

$$\dot{u}(x) = \frac{u(\frac{k+1}{n}) - u(\frac{k}{n})}{\frac{1}{n}}$$

per x che sta in $(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ 

Posso poi definire, dati

 $n-1$ numeri reali $u_1, \dots, u_{n-1}$, e averli estesi ponendo $u_0 = 0$ e $u_n = 7$,

$$F_n(u_0, u_1, \dots, u_n) := \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{u_k - u_{k-1}}{\frac{1}{n}} \right)^2 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} u_k^2$$

versione discreta di
 $\int \dot{u}^2$

versione discreta di
 $\int u^2$

Così approssimo un pbm. in dim. infinita, con uno in dim. finita

Domanda: non è che $F_n \rightarrow F$ in qualche senso, e che anche minimi e p.ti di min. convergono in qualche senso?

Voglio dimostrare che c'è Gamma-convergenza. Ma dove e rispetto a cosa?

1° passo Immergo il mondo discreto in quello continuo.

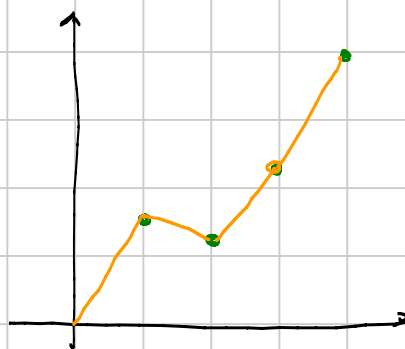
Ci sono almeno due strade:

→ costante a tratti

→ affine a tratti



costante a tratti PC_n



affine a tratti PA_n

In entrambi i casi posso

$$F_n(u) := \begin{cases} \text{la sommatoria} & \text{se } u \in PC_n \quad (PA_n) \\ +\infty & \text{se } u \in L^2((0,1)) \setminus PC_n \\ & \quad \quad \quad \setminus PA_n \end{cases}$$

In questo modo F_n risulta definito su tutto L^2 e ha senso porsi il problema della Gamma-conv. rispetto alla metrica di L^2 .

Se ho scelto la strada affine a tratti, allora la somma toria con i rapp. tucem. è esattamente

$$\int_0^1 \dot{u}^2$$

↑ deriv. debole

mentre la parte di derivata è una approx di $\int_0^1 u^2$

Se ho scelto la strada costante a tratti, allora la parte con u è il vero integrale di u^2 , mentre per le derivate u_0 .

Esercizio: Gamma-convergenza per l'approccio affine a tratti.

LIMINF $u_n \rightarrow u_\infty$ in L^2 e sperare che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) \geq F_\infty(u_\infty) = \int_0^1 \dot{u}_\infty^2 + u_\infty^2$$

Come sempre posso supporre $F_n(u_n) \leq M$. Questo vuol dire che per ogni n le u_n sono affini a tratti e

$$\| \dot{u}_n \|_{L^2}^2 \leq M.$$

Al solito modo $\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty$ e quindi

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^1 \dot{u}_n^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{sommatrice con} \\ \text{i rapporti} \\ \text{incrementali}}} \geq \int_0^1 \dot{u}_\infty^2$$

Inoltre $u_n \rightarrow u_\infty$ uniformemente, da cui il limite sulla seconda parte.

LIMSUP Devo trovare la recovery sequence per ogni $u \in L^2$.

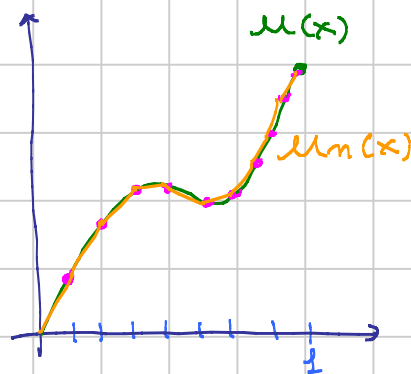
Basta un denso in energia, ad esempio C^1 , nel qual caso posso "unire i puntini".

Se $u \in C^1$ si ha pure

$$u_m \rightarrow u \quad \text{unif.}$$

$$e \quad \int_0^1 u_m^2 \leq \int_0^1 u^2$$

↑
sarebbe vero per
ogni Lagrangiana convessa in p.



Esercizio : Gamma-conv. per l'approccio costante a tratti

LIMINF In questo caso so soltanto che i rapporti incrementali, che sono funzioni costanti a tratti, sono equi- L^2 , quindi hanno una s. succ. convergente.

Cambiando notazione, poniamo

$$D^\varepsilon u(x) = \frac{u(x+\varepsilon) - u(x)}{\varepsilon}$$

In questo modo, se $\varepsilon = \frac{1}{n}$, il funzionale discreto diventa

$$F_\varepsilon(u) = \int_0^1 |D^\varepsilon u(x)|^2 dx + |u(x)|^2$$

se $u \in PC_\varepsilon$, e $+\infty$ altrimenti.

Prendo $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ in L^2 con $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq M$ e so che

$$\|D^\varepsilon u_\varepsilon(x)\| \leq M$$

quindi a meno di s.succ.

$$D^\varepsilon u_\varepsilon(x) \longrightarrow v(x)$$

Volei tanto che $v(x) = u'_0(x)$, perché poter usare la semicontinuità della norma.

Integrazione per parti discreta!

$$\int_0^1 D^\varepsilon g \cdot f = - \int_0^1 g \cdot D^{-\varepsilon} f$$

se almeno una delle
2 ha supporto
compatto

Dim: gioco con le sommatorie

Prendiamo ora $\varphi \in C_c^\infty((0,1))$:

$$\begin{array}{ccc} \int_0^1 D^\varepsilon u_\varepsilon(x) \cdot \varphi(x) & = & - \int_0^1 u_\varepsilon(x) \cdot D^{-\varepsilon} \varphi(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \int_0^1 v(x) \cdot \varphi(x) & = & - \int_0^1 u_0(x) \cdot \varphi'(x) \end{array} \quad \begin{array}{l} u_\varepsilon \xrightarrow{L^2} u_0 \\ D^{-\varepsilon} \varphi \xrightarrow{\text{unif}} \varphi' \end{array}$$

$\leadsto v(x) = u'_0(x)$ e completa la dimostrazione 😊

Equazione di Eulero discreta

$$F_\varepsilon(u) = \int_0^1 |D^\varepsilon u|^2 + |u|^2$$

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(u+tv) &= \int_0^1 |D^\varepsilon u + t D^\varepsilon v|^2 + |u+tv|^2 \\ &= \int_0^1 |D^\varepsilon u|^2 + \int_0^1 2t D^\varepsilon u D^\varepsilon v + t^2 \int_0^1 |D^\varepsilon v|^2 \\ &\quad + \int_0^1 u^2 + \int_0^1 2t uv + t^2 \int_0^1 v^2 = \varphi(t) \end{aligned}$$

Come al solito otteniamo

$$\varphi'(0) = 2 \int_0^1 D^\varepsilon u D^\varepsilon v + 2 \int_0^1 u v \quad \forall v \in PC_\varepsilon \text{ nulla al bordo}$$

Eulero discreta 1^a forma

Integrando per parti con la formula discreta diventa

$$\varphi'(0) = +2 \int_0^1 [-D^{-\varepsilon} D^\varepsilon u + u] v \quad \forall v \in PC_\varepsilon \text{ nulla al bordo}$$

Se u è un p.to di min per F_ε , al solito modo otteniamo che

$$D^{-\varepsilon} D^\varepsilon u(x) = u(x) \quad (\text{ELE Discreta})$$

Svolgendo i calcoli si trova

$$D^{-\varepsilon} D^\varepsilon u(x) = \frac{u(x+\varepsilon) + u(x-\varepsilon) - 2u(x)}{\varepsilon^2}$$

e questo è l'analogo discreto della derivata 2^a

$$u(x+\varepsilon) = u(x) + \varepsilon u'(x) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 u''(x) + o(\varepsilon^2)$$

$$u(x-\varepsilon) = u(x) - \varepsilon u'(x) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 u''(x) + o(\varepsilon^2)$$

quindi $D^{-\varepsilon} D^\varepsilon u(x) \sim u''(x)$

— o — o —