

EFFETTI DI LINEARIZZAZIONE

(Problemi con parametri "piccoli")

Esempio 1 $F(u) = \int_0^1 (\dot{u}^2 + \dot{u}^4 + u^2 - u^4 + u^6) dx$

$$m_\varepsilon := \min \{ F(u) : u(0) = 0, u(1) = \varepsilon \}$$

$\uparrow$
par. piccolo

Facile: per ogni $\varepsilon > 0$ il problema ammette soluzione
(metodo diretto, grazie alla convessità in p e limitatezza dal basso in u)

Voglio capire se e come $m_\varepsilon \rightarrow 0$ per $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Mi aspetto $u(x) = \varepsilon v(x)$. Sostituendo trovo

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_0^1 \varepsilon^2 \dot{v}^2 + \varepsilon^4 \dot{v}^4 + \varepsilon^2 v^2 - \varepsilon^4 v^4 + \varepsilon^6 v^6 \\ &= \varepsilon^2 \underbrace{\int_0^1 \dot{v}^2 + v^2 + \varepsilon^2 \dot{v}^4 - \varepsilon^2 v^4 + \varepsilon^4 v^6}_{G_\varepsilon(v)} \end{aligned}$$

e le DBC diventano $v(0) = 0, v(1) = 1$

Mi aspetto che $G_\varepsilon(v) \xrightarrow{\Gamma} \int_0^1 (\dot{v}^2 + v^2)$ con equicoercività.

Se questo succede, allora $m_\varepsilon \sim \alpha \varepsilon^2$, con

$$\alpha := \min \left\{ \int_0^1 (\dot{v}^2 + v^2) dx : v(0) = 0, v(1) = 1 \right\}$$

Dimostro la Gamma - convergenza

LIMINF Se $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ in $L^2((0,1))$, allora

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} G_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \int_0^1 u_0^2 + u_0^2$$

Ovvia se $LHS = +\infty$. A meno di s.succ. posso supporre che $\liminf > \lim$.

Quindi posso supporre che $G_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq M$. Al solito modo ottengo stima su $\|u_\varepsilon\|_{L^2}^2$ e quindi

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \text{ debole}$$

Ora sulle parti con u_ε ho la semicontinuità della norma, il termine con $\varepsilon^2 u_\varepsilon^4$ lo posso eliminare integrando, e sui termini con u_ε ho conv. unif.

LIMSUP Devo trovare recovery sequence. Basta farlo su un denso in energia per il presunto limite, ad esempio C^4 .

In questo caso posso usare le costanti.

EQUICOERCIVITÀ Da $G_\varepsilon(u) \leq M$ deduco $\|u\|_{L^2} \leq M_1$ e questo, insieme alle BC, basta per concludere.

Ho in realtà dimostrato di più, cioè che per ogni $M \in \mathbb{R}$ ogni famiglia u_ε con

$$G(u_\varepsilon) \leq M$$

ammette una sottosucc. convergente.

— o — o —

Esempio 2 $F(u) = \int_0^1 \sin u (\dot{u}^2) + \sin(u^2)$

$u(0) = 0, \quad u(1) = \varepsilon$

ANSATZ : $u(x) = \varepsilon v(x)$

$F(u) = \int_0^1 \sin u (\varepsilon^2 \dot{v}^2) + \sin(\varepsilon^2 v^2)$

$$= \varepsilon^2 \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin u (\varepsilon^2 \dot{v}^2)}{\varepsilon^2} + \frac{\sin(\varepsilon^2 v^2)}{\varepsilon^2}}_{G_\varepsilon(v)}$$

Spero che $G_\varepsilon(v) \xrightarrow{\Gamma} \int_0^1 (\dot{v}^2 + v^2)$

La dim. è come prima. Le osservazioni importanti sono che

$\frac{\sin(\varepsilon^2 \dot{v}^2)}{\varepsilon^2} \geq \dot{v}^2 \quad (\sin x \geq x \text{ per } x \geq 0)$

$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{\sin(\varepsilon^2 \dot{v}_\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \dot{v}_\varepsilon^2 \geq \int_0^1 \dot{v}_0^2$

dopo aver guadagnato che $\dot{v}_\varepsilon \rightarrow \dot{v}_0$

Per il termine con la funzione basta osservare che

$\frac{\sin(\varepsilon^2 x)}{\varepsilon^2} \rightarrow x \quad \text{unif. sui compatti}$

$$\left| \frac{\sin(\varepsilon^2 x)}{\varepsilon^2} - x \right| = \left| \frac{\sin(\varepsilon^2 x) - \varepsilon^2 x}{\varepsilon^2} \right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylor} \\ \text{Lagrange}}}{=} \left| \frac{f''(\dots) \varepsilon^4 x^2}{2 \varepsilon^2} \right| \underset{\downarrow 0}{\rightarrow} 0$$

Esempio 3

$$\int_0^1 \underbrace{\dot{u}^2 + \dot{u}^4}_{\text{energia elastica}} + \underbrace{\varepsilon u}_{\text{forza esterne "peso"}}$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

Ausatz : $u(x) = \varepsilon v(x)$

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_0^1 \varepsilon^2 \dot{v}^2 + \varepsilon^4 \dot{v}^4 + \varepsilon^2 v \\ &= \varepsilon^2 \underbrace{\int_0^1 \dot{v}^2 + \varepsilon^2 \dot{v}^4 + v}_{G_\varepsilon(v)} \end{aligned}$$

Sembra ragionevole che $G_\varepsilon(v) \rightarrow \int_0^1 (\dot{v}^2 + v) dx$

Dim. come sopra.

Esempio 4 $F(u) = \int_0^1 (\dot{u}^2 + \dot{u}^4 + \varepsilon u^3)$ $u(0) = u(1) = 0$

- Per ogni $\varepsilon > 0$ il minimo esiste (metodo diretto, e devo dire grazie a $\dot{u}^4$)
- La funzione $u_0(x) \equiv 0$ è stazionaria (ELE) ed è STM per ogni $\varepsilon > 0$

Basta calcolare $\delta^2 F(u_0, v) = \int_0^1 \dot{v}^2$ e questo verifica

(L^+) , (J^+) (infatti (SDE) è $\ddot{v} = 0$ e ha come soluz. delle rete) e anche (w^+) è gratis per la convessità in p della Lagrangiana 😊.

- Per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo $u_0(x) \equiv 0$ è GM.

$$\int_0^1 u^2 \geq \varepsilon_0 \int_0^1 u^2 \quad (\text{questo segue, volendo, da } (L^+) \text{ e } (J^+))$$

$\uparrow$
 costante positiva

Diamo un attimo per buono che $\exists \varepsilon_1 > 0$ t.c.

$$\int_0^1 u^4 \geq \varepsilon_1 \int_0^1 u^4 \quad \text{per ogni } u \text{ nulla al bordo.}$$

Ma allora

$$\int_0^1 u^2 + u^4 + \varepsilon u^3 \geq \int_0^1 (\varepsilon_0 u^2 + \varepsilon_1 u^4 + \varepsilon u^3) \geq 0$$

$\uparrow$
 se ε è piccolo

Basta infatti osservare che
ogni $x \in \mathbb{R}$ se ε è piccolo

$$\varepsilon_0 x^2 + \varepsilon_1 x^4 + \varepsilon x^3 \geq 0 \quad \text{per}$$

$$\geq 0 \quad x^2 (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon x)$$

$\Delta < 0$ per ε piccolo

Resta da dim. che $\int_0^1 u^4 \geq \varepsilon_0 \int_0^1 u^4$.

Questa è omogenea, quindi posso supporre $\int_0^1 u^4 = 1$, e quindi vale con

$$\varepsilon_0 := \min \left\{ \int_0^1 u^4 dx : \int_0^1 u^4 dx = 1, u(0) = u(1) = 0 \right\}$$

e questo problema ha soluzione per il metodo diretto (e la sol. è positiva)

Esempio 5 $\int_0^1 u^2 + u^4 + \lambda u^3 \quad u(0) = u(1) = 0.$

Che succede per λ grande?

Ausatz : $u(x) = \lambda^\alpha v(x)$

$$F(u) = \int_0^1 \lambda^{2\alpha} \dot{v}^2 + \lambda^{4\alpha} v^4 + \lambda^{1+3\alpha} v^3$$

Se $\alpha=1$, allora il 2° e 3° esponente sono uguali. Metto $\alpha=1$:

$$F(u) = \int_0^1 \lambda^2 \dot{v}^2 + \lambda^4 \dot{v}^4 + \lambda^4 v^3$$

$$= \lambda^4 \int_0^1 \frac{1}{\lambda^2} \dot{v}^2 + \dot{v}^4 + v^3$$

$$\underbrace{G_\lambda(v)} \xrightarrow{\Gamma} \int_0^1 \dot{v}^4 + v^3$$

Questo mi dice che m_λ , cioè il min di $F(u)$ a λ fisso, è del tipo

$$m_\lambda \sim c \lambda^4 \quad \text{dove} \quad c := \min \left\{ \int_0^1 (\dot{v}^4 + v^3) : v(0) = v(1) = 0 \right\}$$

— o — o —