

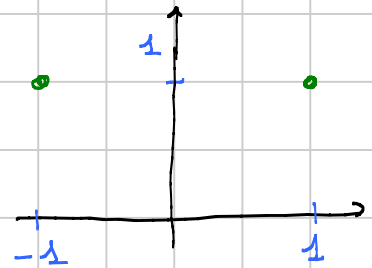
Problemi con ostacoloEsempio motivazionale

$$\min \left\{ \int_{-1}^1 u'^2 + 2017 u : u(-1) = u(1) = 1, \boxed{u(x) \geq 0} \right\}$$

ostacolo

Possibili ostacoli

- $u(x) \geq \varphi(x) \quad \forall x \in [a, b]$
- $\varphi_1(x) \leq u(x) \leq \varphi_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$
- $\varphi_1(x) \leq u(x) \leq \varphi_2(x) \quad \forall x \in [c, d] \subseteq [a, b]$



↑ Dato

- anche ostacoli puntuali $A_1 \leq \varphi(c) \leq B_1$

Posso anche pensare ostacoli sulla derivata, ad esempio

$$u'(x) \geq \tau \quad \forall x \in [a, b] \quad \quad u'(x) \leq \sigma \quad \forall x \in [c, d]$$

— o — o —

Esistenza

Gli ostacoli sulla funzione si comportano bene nel metodo diretto.

(Gli ostacoli sulla funzione passano al limite rispetto alla convergenza uniforme)

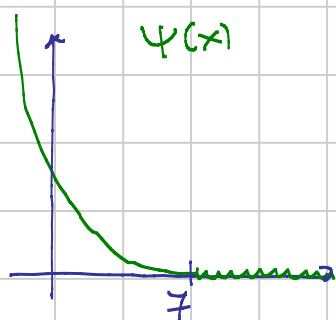
Nell'esempio si vede che il problema ammette minimo su $H^1((-1, 1))$.

Gli ostacoli sulla derivata sono più difficili da passare al limite, ma si può usare il trucco dell'integrale

Esempio Supponiamo $v_n(x) \geq \tau \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 $v_n \rightarrow v_\infty$ in $L^2(a, b)$ debole

nonché che fosse

$$v_\infty(x) \geq \tau \quad \text{per quasi ogni } x \in [a, b]$$



Considero $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa e come in figura

- $\psi(x) = 0$ per $x \geq \tau$
- $\psi(x) > 0$ per $x < \tau$
- ψ è convessa
- ψ è C^1

$$\int_a^b \psi(v_n(x)) dx = 0 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

Essendo ψ convessa, per i teoremi di SCI vale

$$0 \leq \int_a^b \psi(v_\infty(x)) dx \stackrel{\text{SCI}}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi(v_n(x)) dx = 0$$

$\uparrow \psi \geq 0$

Ne segue che $\int_a^b \psi(v_\infty(x)) dx = 0$ e quindi $v_\infty(x) \geq \tau$ q.o.

Oss. Se il vincolo era $v(x) \geq \tau \sin x$ consideravo

$$\psi(v(x) - \tau \sin x)$$

con ψ come in figura e osservare che



$$v_n \rightarrow v_\infty \Rightarrow v_n(x) - \tau \sin x \rightarrow v_\infty(x) - \tau \sin x$$

$\rightarrow 0 \rightarrow 0$

(ELE) + regolarità Supponiamo di avere ostacolo del tipo $u(x) \geq \varphi(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Cosa risolve un p.to di min?

$$\varphi(t) = F(u + t v) \quad \text{posso per } t \geq 0 \text{ se } v(x) \geq 0 \text{ sempre}$$

Se u è minimo, allora φ ha minimo per $t=0$ ed essendo definita sdo per $t \geq 0$ trovo

$$\varphi'(0) \geq 0$$

$$\int_a^b L_s(x, u, \dot{u}) v + L_p(x, u, \dot{u}) \ddot{v} \geq 0 \quad \forall v \in C_c^\infty \text{ e } v(x) \geq 0$$

Integrando per parti e usando DBC

$$\int_a^b \{L_s(x, u, \dot{u}) - [L_p(x, u, \dot{u})]'\} v \geq 0 \quad \forall v \in C_c^\infty \text{ e } v(x) \geq 0$$

Per una variante semplice di FLCV otteniamo

$$L_s(x, u, \dot{u}) - [L_p(x, u, \dot{u})]' \geq 0$$

cioè volendo

$$[L_p(x, u, \dot{u})]' \leq L_s(x, u, \dot{u})$$

La vecchia ELE
è diventata una
disuguaglianza

Supponiamo $\varphi(x)$ continua e sia

$$K := \{x \in [a, b] : u(x) = \varphi(x)\} = \text{regione di contatto}$$

Allora

- (ELE) con $\leq$ vale per ogni $x \in [a, b]$
- (ELE) con $=$ vale per ogni $x \in [a, b] \setminus K$

(Se $x_0 \notin K$, allora posso usare v di segno arbitrario che sono $\neq 0$ solo vicino ad x_0 , e con queste ottengo ELE normale)

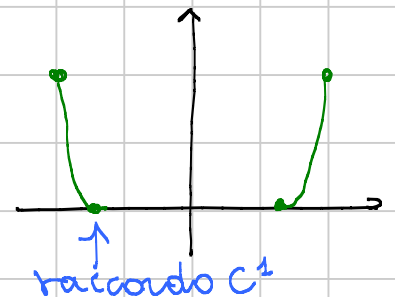
— o — o —

Regolarità

- se $\varphi \in C^1$, allora il contatto è C^1
- se $\varphi \in C^{2*}$, allora il contatto è $C^{1,1}$
(il minimo può non essere C^2)

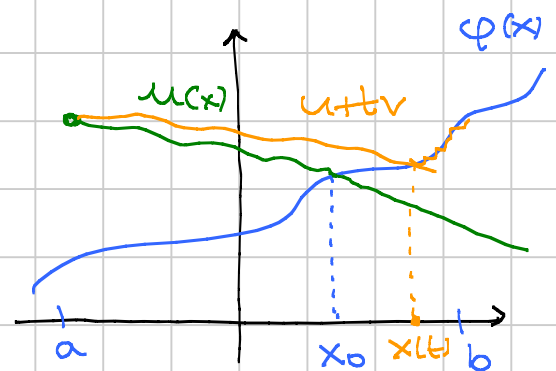
Per vedere che il min. non è C^2 basta l'esempio motivazionale

— o — o —



Dimostrazione del contatto C^1 in un caso particolare in cui non c'è contatto su $[a, x_0)$ e poi c'è su $[x_0, b]$.

Data $v \in C_c^\infty$ considero $u+tv$ e spero che ci sia un p.to di contatto $x(t)$.



Sia

$$\varphi(t) = \int_a^{x(t)} L(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v}) + \int_{x(t)}^b L(x, \varphi, \dot{\varphi})$$

Se u è minimo, allora $\varphi'(0) = 0$.

Accertiamoci dell'esistenza di $x(t)$

$$u(x(t)) + t v(x(t)) = \varphi(x(t))$$

$\Phi(x, t) = u(x) + t v(x) - \varphi(x)$
e spero nel teo. funz. implicite

$$\Phi(x_0, 0) = 0$$

$$\Phi_x(x, t) = \dot{u}(x) + t \dot{v}(x) - \dot{\varphi}(x)$$

$$\Phi_x(x_0, 0) = \dot{u}(x_0) - \dot{\varphi}(x_0)$$

Se fosse $\Phi_x(x_0, 0) \neq 0$, potrei ricavare $x(t)$ in funzione di t .

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= L(x(t), u(x(t)) + t v(x(t)), \dot{u}(x(t)) + t \dot{v}(x(t))) \dot{x}(t) \\ &\quad - L(x(t), \varphi(x(t)), \dot{\varphi}(x(t))) \dot{x}(t) \\ &\quad + \int_a^{x(t)} L_s(\dots) v + L_p(\dots) \dot{v} \end{aligned}$$

Metto $t = 0$

$$\begin{aligned} 0 = \varphi'(0) &= L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) \dot{x}(0) \\ &\quad - L(x_0, \varphi(x_0), \dot{\varphi}(x_0)) \dot{x}(0) \\ &\quad + \underbrace{\int_a^{x_0} L_s(\dots) v + L_p(\dots) \dot{v}}_{\int_a^{x_0} (L_s - L_p') v + L_p(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) v(x_0)} \\ &\quad = 0 \text{ per ELE} \end{aligned}$$

Ho ottenuto che

$$\begin{aligned} &[L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) - L(x_0, \varphi(x_0), \dot{\varphi}(x_0))] \dot{x}(0) + \\ &\quad L_p(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) v(x_0) \end{aligned}$$

Dal teo. funz. implicite $\dot{x}(0) = - \frac{\Phi_t(x_0, 0)}{\Phi_x(x_0, 0)}$

e quindi

$$\dot{x}(0) = - \frac{v(x_0)}{\dot{u}(x_0) - \dot{\varphi}(x_0)}$$

Avendolo a sostituire e semplificando $v(x_0)$, che posso assumere $\neq 0$, trovo

$$\begin{aligned} L_p(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) (\dot{u}(x_0) - \dot{\varphi}(x_0)) &= \\ &= L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) - L(x_0, u(x_0), \dot{\varphi}(x_0)) \end{aligned}$$

L'abbiamo dimostrata se $\dot{u}(x_0) \neq \dot{\varphi}(x_0)$, ma vale anche se sono uguali per ragioni ovvie.

MA non possono essere diversi se $L(x, s, p)$ è strettamente convessa in p

Sotto ipotesi di stretta convessità il contatto è C^1 .

— o — o —