

GEODETICHE

Caso dello spazio Euclideo

Dati $A \in \mathbb{R}^n$ e $B \in \mathbb{R}^n$, trovare la curva più corta che unisce A e B .

Limitandoci a curve regolari $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1

$$\text{lunghezza}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

(in 2 variabili $\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$ $\gamma(t) = (x(t), y(t))$)

Brutta notizia: la Lagrangiana ha crescita lineare.

$$\min \left\{ \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt : \gamma(a) = A, \gamma(b) = B \right\}$$

Sospettiamo che il min sia dato dal segmento.

Prima possibile dimostrazione

Supponiamo $B \neq A$.

Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ vale

$$|\langle \dot{\gamma}(t), v \rangle| \leq \|\dot{\gamma}(t)\| \cdot \|v\| \quad \text{se } v \neq 0$$

$\uparrow$
 c.s.

$$\|\dot{\gamma}(t)\| \geq \frac{1}{\|v\|} \cdot |\langle \dot{\gamma}(t), v \rangle| \quad \text{e quindi}$$

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \geq \frac{1}{\|v\|} \int_a^b |\langle \dot{\gamma}(t), v \rangle| dt \geq \frac{1}{\|v\|} \left| \int_a^b \underbrace{\langle \dot{\gamma}(t), v \rangle}_{\frac{d}{dt} \langle \gamma(t), v \rangle} dt \right|$$

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \geq \frac{1}{\|v\|} \left| \left[\langle \gamma(t), v \rangle \right]_a^b \right| = \frac{1}{\|v\|} \left| \langle B, v \rangle - \langle A, v \rangle \right|$$

$$= \frac{1}{\|v\|} \left| \langle B-A, v \rangle \right|$$

Usando $v = B-A$ ottengo che

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \geq \|B-A\| = \text{lunghezza segmento}$$

Seconda idea possibile

Suppongo B ed A allineati con l'origine (a meno di trasl. posso)

$$|\langle \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle| \leq \|\gamma(t)\| \cdot \|\dot{\gamma}(t)\|$$

Se $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ posso dividere e trovo

$$\|\dot{\gamma}(t)\| \geq \left| \frac{\langle \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle}{\|\gamma(t)\|} \right| \quad \text{da cui}$$



$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \geq \int_a^b \left| \frac{\langle \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle}{\|\gamma(t)\|} \right| dt \geq \left| \int_a^b \frac{\langle \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle}{\|\gamma(t)\|} dt \right|$$

$$= \frac{d}{dt} \|\gamma(t)\|$$

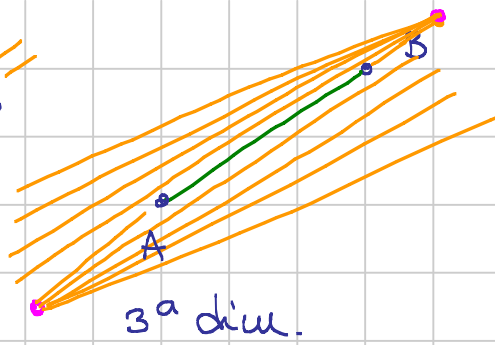
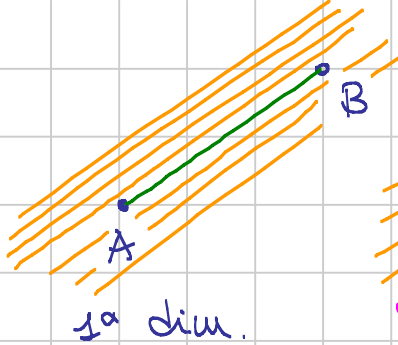
(pensare in 2 o 3 variabili per convi.)

$$= \left| \left[\|\gamma(t)\| \right]_a^b \right| = \|B\| - \|A\|$$

$$= \|B-A\| \quad \text{se vale l'allineamento come in figura.}$$

Questo dimostra che il segmento è ottimale tra tutte le curve C^1 che non passano per l'origine.

(Basta spostare l'origine se serve)



Ci sono ∞ varianti possibili

— o — o —

Caso del cilindro

$$x(t) = r \cos \theta(t)$$

$$y(t) = r \sin \theta(t)$$

$$z(t)$$

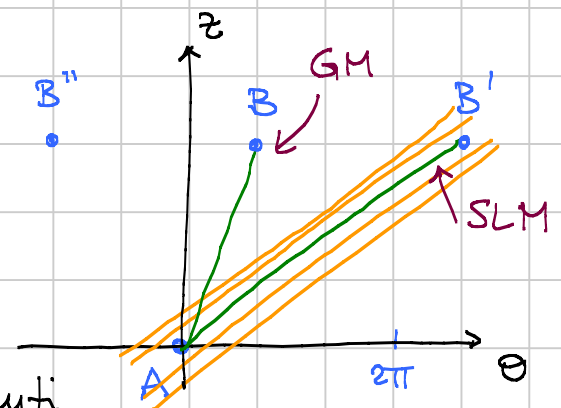
$$\text{lunghezza}(\sigma) = \int_a^b \sqrt{r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2} dt$$

Dati 2 p.ti sul cilindro, posso mettere le coordinate in modo che il 1° sia $\theta = 0, z = 0$.

Per il punto B ci sono tante possibilità.

Supponiamo per sempl. $r=1$.

Il problema diventa la curva più corta tra A ed uno dei rappresentanti di B nel piano, quindi nello sviluppo è un segmento



Tra i vari segmenti uno è più corto degli altri.

Gli altri "fanno più giri" e sono SLM, come si vede calibrandoli con le parallele.

— o — o —

CASO DELLA SFERA

$$x(t) = \cos \varphi(t) \cos \theta(t)$$

$$y(t) = \cos \varphi(t) \sin \theta(t)$$

$$z(t) = \sin \varphi(t)$$

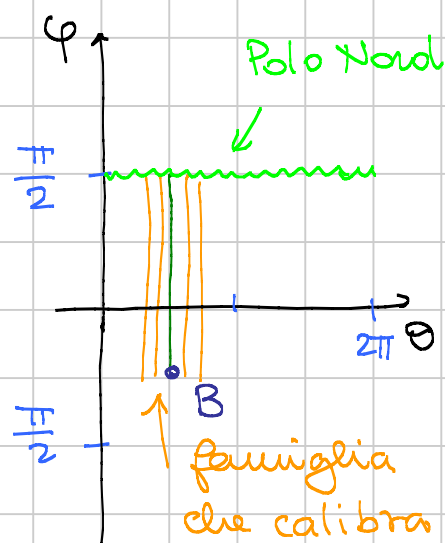
dove φ è la "latitudine" e θ la "longitudine"

$$\text{lunghezza}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \cos^2 \varphi \cdot \dot{\theta}^2} dt$$

Supponiamo dati 2 p.ti A e B e prendiamo A = polo N e supponiamo che B non sia il polo S.

Dico che la curva ottimale ha $\theta = \text{costante}$, cioè è un meridiano

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \cos^2 \varphi \cdot \dot{\theta}^2} dt &\geq \int_a^b \sqrt{\dot{\varphi}^2} \\ &= \int_a^b |\dot{\varphi}| dt = \text{differenza} \\ &\quad \text{latitudini.} \end{aligned}$$

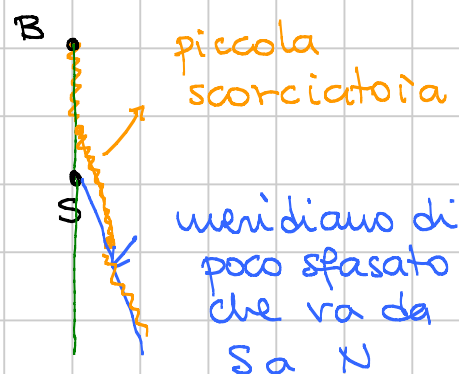


Cosa posso dire del meridiano "opposto" che fa il giro dall'altra parte?

→ Risolve ELE, ma non è nemmeno WLM.

Come ottengo curva vicino come posiz. e derivata, una più corta

Il polo S è il coniugato del polo N: le soluzioni che emanano dal polo N arrivano a finire nel S.



MIRACOLO DELLE GEODETICHE

Consideriamo ora curve a valori in una sottovarietà qualunque di $\mathbb{R}^n$

$$F_1(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

crescita lineare

$$F_2(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt$$

crescita quadratica 😊
quindi posso fare metodo diretto, ottenere unicità, ...

Il minimo di F_1 ed F_2 sono collegati

$$\begin{aligned} F_1(\gamma) &= \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \sqrt{b-a} \left\{ \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt \right\}^{1/2} \\ &= \sqrt{b-a} \{F_2(\gamma)\}^{1/2} \end{aligned}$$

Quindi

$$\min F_1(\gamma) \leq \sqrt{b-a} \{ \min F_2(\gamma) \}^{1/2}$$

Fissati
 $\gamma(a) = A$
 $\gamma(b) = B$

Nella disug. di Hölder vale il segno di $(=)$ se e solo se le due funzioni sono proporzionali, cioè se e solo se

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \text{costante} \quad (\text{indep. da } t)$$

I due minimi hanno il segno di $=$ se vale questo Lemma

Lemma

Data $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 , esiste una riparametrizzazione $\psi: [a,b] \rightarrow [a,b]$ monotona e sing. e abbastanza regolare t.c. $\gamma(\psi(t)) = \gamma_2$ ha la stessa lunghezza e $\|\dot{\gamma}_2(t)\| = \text{costante}$.

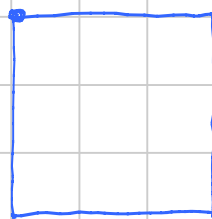
Se vale il lemma, allora

$$\min F_1(\delta) = \sqrt{b-a} \cdot \{\min F_2\}^{1/2}$$

Il secondo esiste, quindi esiste il 1°.

Oss. Il lemma, anche se fisicamente ragionevole, non è banale. Ad esempio

→ esiste una curva C^∞ che percorre un quadrato



→ la sua riparametrizzazione è Lip. ma non C^1 .

— o — o —