

Def. Sia $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione qualunque.
Definiamo il suo involucro convesso come

$$\psi^{**}(x) := \sup \{ g(x) : g \text{ è convessa e } g(y) \leq \psi(y) \text{ per ogni } y \in \mathbb{R} \}$$

Oss. Affinché ψ^{**} sia ben definita occorre

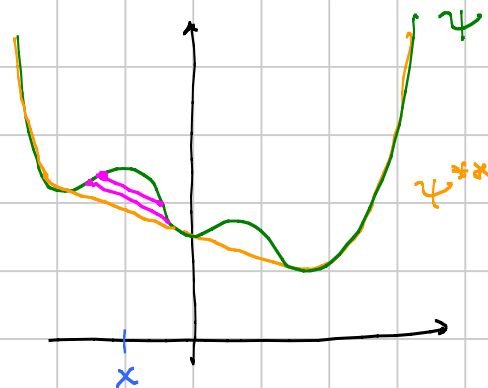
- o accettare funzioni con valori in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
- o definirlo solo quando esiste a priori una funzione convessa $\leq \psi$ in $\mathbb{R}$.

Prop (Proprietà di ψ^{**})

- ① ψ^{**} è convessa
- ② $\psi^{**}(x) \leq \psi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
- ③ Il sup nella def. è un max
- ④ Posso definire equivalentemente

$$\begin{aligned} \psi^{**}(x) &= \sup \{ \text{rette che stanno sotto } \psi \} \\ &= \sup \{ ux + m : uy + m \leq \psi(y) \quad \forall y \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

- ⑤ $\psi^{**}(x)$ è l'inf. di tutti i segmenti che congiungono due pti del grafico, uno prima e uno dopo x .



Idee per la dimostrazione ② è ovvia

- ① Fatto di analisi 1: il sup di convesse è convessa (si dimostra o con la definizione o con il fatto che la convessità di una funzione è equiv. alla convessità del sopra-grafico + intersezione di convessi è convessa).

$$\textcircled{3} = \textcircled{1} + \textcircled{2}$$

④ Ogni funzione convessa sta sopra alla retta tangente (o ancora meglio ad un cono di possibili rette tangenti).

⑤ Prendo una retta tangente a ψ^{**} in x e la alzo un po'; se non toccasse ψ in due p.ti ...

— o — o —

Consideriamo ora un funzionale del tipo

$$F(u) = \begin{cases} \int_a^b \psi(x) dx & \text{se } u \in C^1([a,b]) \text{ o } C^\infty \\ +\infty & \text{altrimenti in } L^2([a,b]) \end{cases}$$

Teorema Supponiamo che $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sia

(i) Superlineare (o ancora meglio più che quadratica).

Allora il rilassato è

$$\hat{F}(u) = \begin{cases} \int_a^b \psi^{**}(x) dx & \text{se } u \in \text{Sobolev opportuno} \\ +\infty & \text{(n' nel caso quadratico) altrimenti.} \end{cases}$$

Dim. Occorre fare le solite 3 verifiche.

① $\hat{F}(u) \leq F(u)$ sempre. Ovvio perché $\psi^{**} \leq \psi$.

② $\hat{F}(u)$ sia SCL. Sì, è come nella lezione scorsa, poiché ψ^{**} è convessa. Occhio: qui avevamo usato la crescita, ma se

$\psi(p) \geq Ap^2 - B \quad \forall p \in \mathbb{R} \quad (\text{con } A > 0)$
allora pure

$$\psi^{**}(p) \geq \underbrace{Ap^2 - B}_{\text{contribuisce alla definizione di } \psi^{**}} \quad \forall p \in \mathbb{R}$$

Oss. Nel caso superlineare è leggermente più delicato

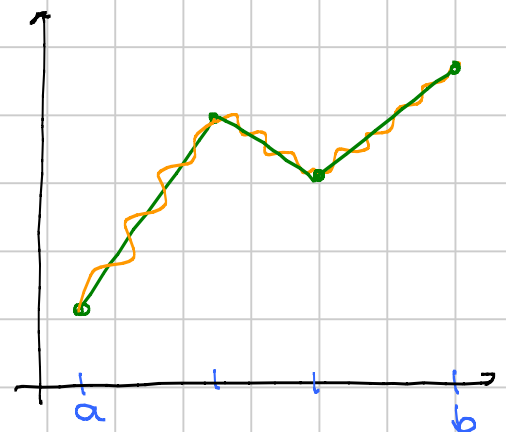
③ Sene l'esistenza di una recovery per ogni $u \in D \subseteq L^2$ denso in energia.

Uso come D le funzioni affini a tratti, che alla lez. precedente abbiamo dimostrato essere dense in energia per $\hat{F}(u)$.

Riduzione: ci basta dimostrare che per ogni retta $l(x) = mx + n$ e per ogni intervallo (c, d) esiste $v_m \in C^\infty$ o in C^1 t.c.

$$v_m \rightarrow l \quad \text{in } L^2 \text{ e } \limsup_{m \rightarrow +\infty} F(v_m) \leq \hat{F}(l)$$

(se ho fatto questo, poi in ogni sottointervallo della affine a tratti approssimo la retta corrispondente, stando attento alle giunture)



Ci siamo quindi ridotti ad approssimare $\ell(x) = mx + n$.

→ Se $\psi(m) = \psi^{**}(m)$, allora uso banalmente $v_m(x) \equiv \ell(x)$

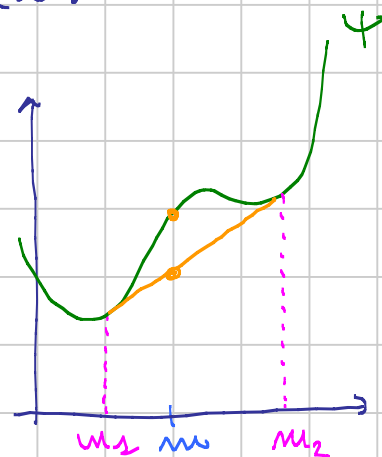
$$F(v_m) = \int_c^d \psi(m) = \int_c^d \psi^{**}(m) = \hat{F}(\ell)$$

→ Se $\psi^{**}(m) < \psi(m)$, possiamo che esistano m_1 ed m_2 come in figura, cioè tali che

$$m = \lambda m_1 + (1-\lambda) m_2$$

e

$$\psi^{**}(m) = \lambda \psi(m_1) + (1-\lambda) \psi(m_2)$$



per un opportuno $\lambda \in (0,1)$.

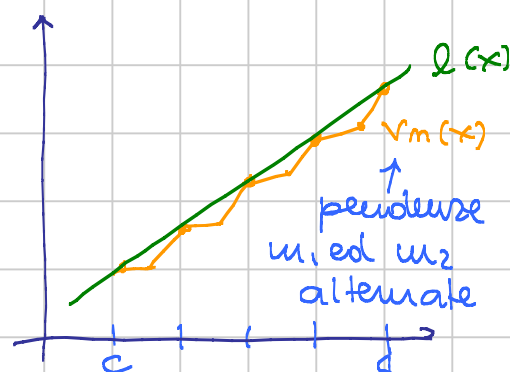
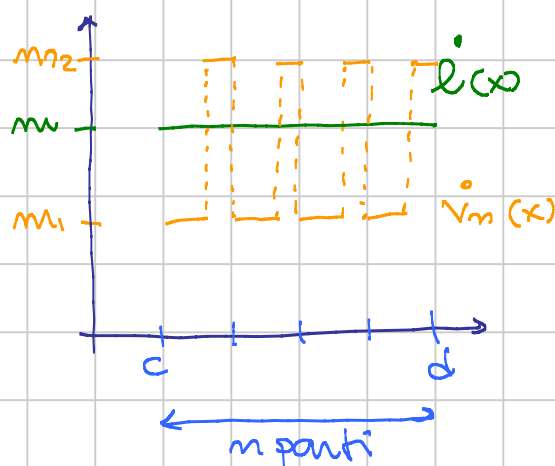
In questo caso costruisco $v_m(x)$ in questo modo: divido l'intervallo (c,d) in n parti uguali, e poi in ciascuna parte pongo $v_m(x) = m_1$ ed m_2 in proporzioni date da λ .

Quando vado a fare la primitiva ottengo $v_m \rightarrow \ell$ uniformemente, e che coincidono con $\ell(x)$ in tutti i punti della suddivisione.

Ora

$$F(v_m) = (d-c) [\lambda \psi(m_1) + (1-\lambda) \psi(m_2)]$$

$$= (d-c) \psi^{**}(m) = \hat{F}(\ell)$$



In questo caso abbiamo proprio che $F(v_m) = \hat{F}(l)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.

Se la voglio C^1 o C^∞ deve pagare un minimo in ogni raccordo.

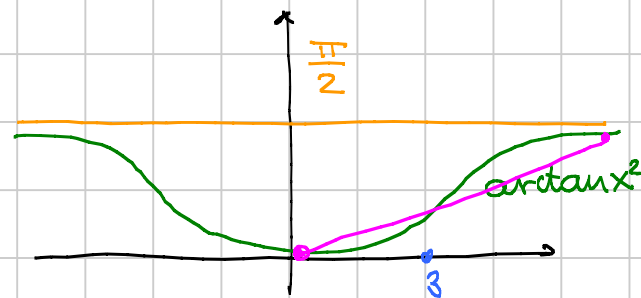
→ Se $\psi^{**}(u) < \psi(u)$, ma non esiste un segmento come in figura, per la proprietà ⑤ dell'involuppo esiste comunque un segmento tale che arriva a meno di ε , cioè

$$\psi^{**}(u) + \varepsilon \geq \lambda \psi(u_1) + (1-\lambda) \psi(u_2)$$

e quindi la costruzione è sostanzialmente la stessa.

— o — o —

Esempio 1 $\psi(x) = \arctan(x^2)$
 $= \log(1+x^2)$



In entrambi i casi $\psi^{**}(x) \equiv 0$ ma non esiste il segmento, ma è vero che $\psi^{**}(x)$ è l'inf di segmenti che congiungono punti del grafico, uno prima e uno dopo.

Esempio 2 $\min \left\{ \int_0^7 \arctan(u^2) + (u - e^x)^2 dx : \right.$
 $\left. u(0) = 0, u(7) = 2017 \right\}$

L'inf. è 0 e il minimo non esiste.

Detto $F(u)$ il funzionale, il suo inf è uguale all'inf del rilassato, per il quale basta fare l'inf della prima parte (discorso delle perturbazioni continue).

Per il teo. e l'esempio precedenti, il rilassato è

$$\hat{F}(u) = \int_0^7 (u - e^x)^2 dx$$

e questo ha $\inf = 0$.

Occhio! Avrei dovuto tenere conto delle DBC quando vado a fare le recovery, ma le posso realizzare facilmente nel 1° e ultimo tratto pagando quasi nulla (costano meno di $\frac{\pi}{2}$ · lunghezza del tratto in cui modifico).

Come sono fatte le succ. minimizzanti?

Devono tendere ad e^* , ad esempio sui compatti di $(0, 7)$ e avere derivata che alterna 0 a valori enormi, come nei segmenti dell'esempio 1.

