

Estensione per rilassamento

$$F(u) := \int_a^b \psi(u) dx \quad \begin{array}{l} \forall u \in C^1([a,b]) \\ \forall u \in C^\infty([a,b]) \end{array}$$

Obiettivo: estendere F a tutto L^2

per rilassamento. L'estensione sotto certe ipotesi è

$$\hat{F}(u) := \begin{cases} \int_a^b \psi(u) dx & \text{se } u \text{ è spazio di Sobolev} \\ & \text{opportuno} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\uparrow$
deriv. debole

Teorema Supponiamo $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sia

- (i) convessa (quindi in particolare continua)
- (ii) superlineare, cioè

$$\lim_{p \rightarrow \pm\infty} \frac{\psi(p)}{|p|} = +\infty$$

Allora $\hat{F}(u)$ è il rilassato di $F(u)$ rispetto, ad esempio, alla metrica di $L^2(a,b)$ (ma non sarebbe diverso in L^{25}).

La dim. si può fare totalmente elementare se ψ è almeno quadratico, cioè esistono $A > 0$ e B t.c.

$$\psi(p) \geq Ap^2 - B \quad \forall p \in \mathbb{R}$$

Dim. Se voglio che $\hat{F}$ sia il rilassato di F , mi basta fare 3 verifiche (vedi les. precedenti):

- ① $\hat{F}(u) \leq F(u)$
- ② $\hat{F}$ è sci
- ③ esistenza di una recovery sequence per ogni $u \in D$ che sia denso in energia per $\hat{F}$.

Verifica di ① Ovvio

Verifica di ② Devo dimostrare che, se $u_n \rightarrow u_\infty$ in L^2 , allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \hat{F}(u_n) \geq \hat{F}(u_\infty)$$

Se il LHS è $+\infty$, allora è banale. Quindi, a meno di s.succ., posso assumere che

$$\hat{F}(u_n) \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Grazie alla crescita quadratica deduco che

$$\int_a^b (A u_n^2 - B) dx \leq \hat{F}(u_n) \leq M$$

e quindi
$$\int_a^b u_n^2 dx \leq \frac{M + B(b-a)}{A}$$

Da qui in poi è il solito discorso, cioè a meno di s.succ.

$$u_n \xrightarrow[\text{debole } L^2]{\quad} v_\infty, \text{ che poi è } u_\infty$$

Dalla debole L^2 + convessità ottengo quello che volevo (uso il teo. che dice debole L^2 + γ convessa $\Rightarrow$ sci.)

Oss. Se ho sdo crescita superlineare, un teo. misterioso garantisce comunque

$$u_n \rightarrow v_\infty = u_\infty \quad \text{debole } L^1,$$

e questo sappiamo che basta per concludere.

Verifica di ③ Quali sono ragionevoli $D \leq L^2$ che sono densi in energia per $\hat{F}$?

Risposte possibili :
 $\rightarrow$ funzioni C^1
 $\rightarrow$ funzioni C^∞
 $\rightarrow$ funzioni affini a tratti

Lemma Le funzioni affini a tratti sono dense in energia per $\hat{F}$.

Dim. Data $u \in L^2$ devo trovare $\{u_n\} \subseteq$ affini a tratti tale che

$$u_n \rightarrow u \quad \text{e} \quad \hat{F}(u_n) \rightarrow \hat{F}(u)$$

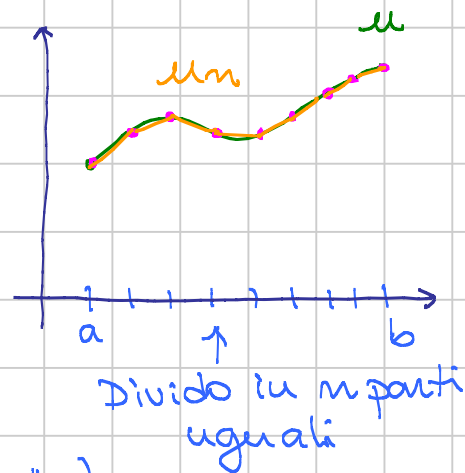
La cosa è banale se $u \in H^1$: scelgo $u_n \equiv u$ ed è fatta.
aggiunto dopo video

La cosa è facile anche se $u \in H^1$, ma $\hat{F}(u) = +\infty$. Infatti per sci a me basta ottenere che

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \hat{F}(u_n) \leq \hat{F}(u)$$

Quindi ci basta ottenere la successione quando $u \in H^1$ e $\hat{F}(u) < +\infty$.

In questo lo slogan è : unire i puntini
 Dico che se un ottente unendo
 i puntini verificano la tesi.



- $u_n \rightarrow u$ pure uniformemente
 (questo segue dal fatto che u è
 unif. conti. in $[a, b]$: fisso $\varepsilon > 0$ e
 prendo il δ dell'unif. conti. ; appena
 gli intervallini sono lunghi $< \delta$ è fatto).

- Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$\hat{F}(u_n) \leq \hat{F}(u)$$

Se dimostro questa, la disug. con il limsup segue facil-
 mente.

Detti $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ i p.ti della suddivisione,
 vale

$$\hat{F}(u_n) := \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \psi(u_n) \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \psi(u) = \hat{F}(u)$$

in ogni tratto la retta è
 il p.to di min. con DBC fissate.

— o — o —

Per completare la verifica di ③ basta mostrare che per ogni
 u affine a tratti esiste una recovery, cioè una succ.
 $\{u_n\} \subseteq C^\infty(a, b)$ tale che

$$u_n \rightarrow u \text{ in } L^2$$

$$\limsup F(u_n) \leq \hat{F}(u)$$

↑
senza cappuccio

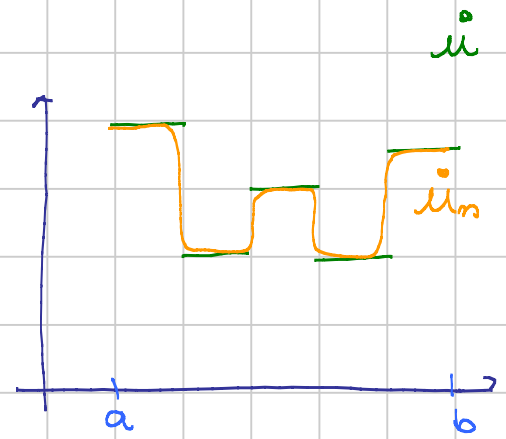
Questo è uno dei tanti lemmi di approssimazione, del

tipo quello utilizzato per mostrare che l'inf in C^1 o in C^∞ di molti funzionali integrali è lo stesso.
Volendolo fare con le mani

Basta scegliere u_n che approssimi la u costante a tratti.

Occhio: u_n devono stare in C^∞ , ma l'approssimazione basta molto meno, ad esempio uniforme sui compatti che non contengano p.ti di salto.

— o — o —

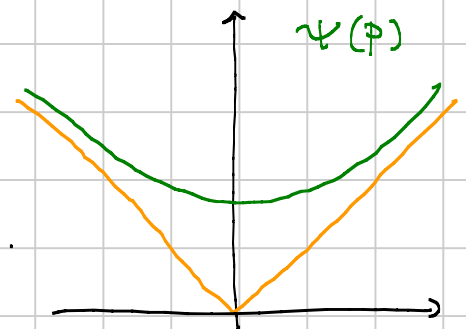


La crescita segue davvero, cioè se manca la crescita superlineare può accadere che $\hat{F}(u) < +\infty$ anche su funzioni u discontinue.

Esempio 1 $\int_{-1}^1 \sqrt{1+u^2} dx = F(u)$

La $\psi(p) = \sqrt{1+p^2}$ è a crescita lineare.

Considero $u = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } x > 0. \end{cases}$

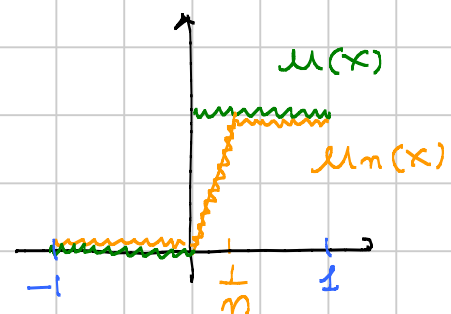


Dico che esiste $u_n \rightarrow u$ in L^2 t.c. $F(u_n) \rightarrow$ numero
 $\uparrow$ di classe C^1 o C^∞ .

È evidente che $u_n \rightarrow u$

$$F(u_n) = \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{1+n^2} dx$$

$$= \frac{1}{n} \sqrt{1+n^2} \rightarrow 1$$



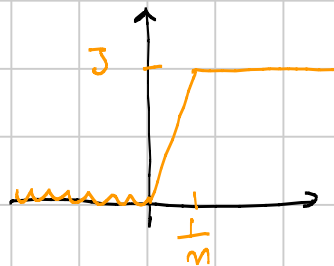
Quindi $\hat{F}$, calcolato nella u con un salto, vale ≤ 1 .

Potrei anche fare $u_n \in C^1$ o C^∞ pagando pochissimo di più

Oss. Un salto alto J paga al max

$$F(u_n) = \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{1+n^2 J^2} dx$$

$$= \frac{1}{n} \sqrt{1+n^2 J^2} \rightarrow |J|$$

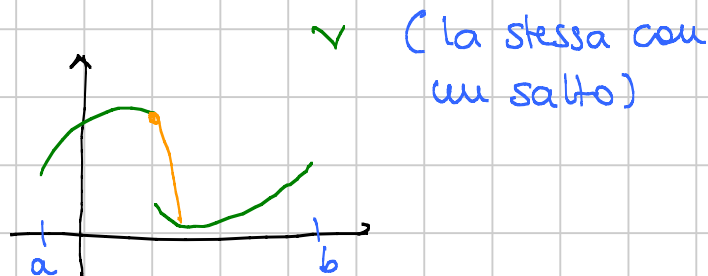
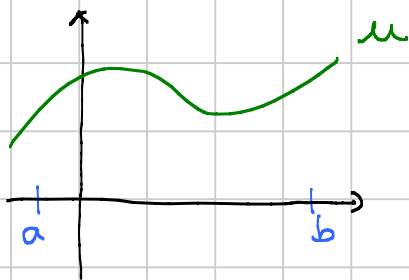


Oss. per il futuro : il caso a crescita lineare porta allo spazio BV (bounded variation) come spazio su cui il rilassato è finito.

Se invece la crescita è del tipo $\int |u'|^p$, il rilassato è finito in $W^{1,p}$ se $p > 1$.

Esempio 2 $F(u) = \int_a^b e^u dx$

La crescita di $\psi(p)$ è fin troppo per $p \rightarrow +\infty$, ma non c'è per $p \rightarrow -\infty$. In questo caso salti "in su" non sono possibili, ma salti in giù sono gratis



Allora $\hat{F}(u) = \hat{F}(v)$. Basta approssimare v opportunamente.

— o — o —