

IPOTESI DI CRESCITA

Def. Sia $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che

- ψ ha crescita superlineare se

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\psi(p)}{p} = \lim_{p \rightarrow -\infty} \frac{\psi(p)}{|p|} = +\infty$$

- ψ ha crescita almeno quadratica se

$$\liminf_{p \rightarrow \pm\infty} \frac{\psi(p)}{p^2} > 0$$

Oss. Si ha che ψ ha crescita almeno quadratica se e solo se esistono A e B reali t.c. $A > 0$ e

$$\psi(p) \geq Ap^2 - B$$

$\forall p \in \mathbb{R}$ (c'è una parabola sotto)

Fatto vero (ma un po' banale) Se ψ ha crescita superlineare e

$$\int_a^b \psi(f_n(x)) dx \leq M$$

allora f_n ammette almeno una s.succ. che converge debolmente in $L^1((a,b))$.

Fatto vero (ma più semplice) Lo stesso supponendo crescita almeno quadratica (ci si basa su L^2 e si ottiene L^2 debole)

Oss. $\psi(p) = |p| \log(1+|p|)$ è superlineare.

Torniamo all'esempio

$$\min \left\{ \int_0^1 (u^4 + u^3) dx : u(0) = u(1) = 0 \right\}$$

Ora sappiamo che esiste almeno un p.to di min

$$u_0 \in W^{1,4}((0,1)).$$

Possiamo ottenere più regolarità? C^∞ ?

Ricaviamo (ELE) in forma debole

$$\varphi(t) := F(u+tv) \quad \text{e calcoliamo } \varphi'(t)$$

Possiamo derivare sotto il segno di integrale?

$$\varphi(t) = \int_0^1 (u+tv)^4 + (u+tv)^3$$

$$\leadsto \varphi'(t) = \int_0^1 4(u+tv)^3 \dot{v} + 3(u+tv)^2 v$$

In generale questo è vero se si ha una dominazione sulla derivata. Sulla ponte con u e v non ci sono pbm. perché è tutto C^0 .

Ammettendo di prendere $v \in C^\infty$, basta saper controllare

$$\int_0^1 |u|^3 \quad \text{e questo si controlla con } \int_0^1 u^4$$

grazie alla solita $|x|^3 \leq x^4 + 1.$

$$\quad \quad \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

$$\delta F(u, v) = \int_0^1 4u^3 \dot{v} + 3u^2 v = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty((0,1))$$

Questo è come dire che

$$(4u^3)' = -3u^2$$

Da qui segue che il RHS è continuo, quindi $4u^3$ ha la derivata continua, quindi è C^1 , e quindi

$$4u^3 \in C^1$$

In particolare $4u^3 \in C^0$ e quindi $u \in C^0$ e quindi $u \in C^1$

Achtung! Se $f^3 \in C^1$, possiamo dedurre che $f \in C^0$,
ma non che $f \in C^1$.

Possiamo però dire che $f \in C^1$ nell'aperto in cui non si annulla

$$f^3 = g \in C^1 \quad A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$$

Allora $f \in C^1(A)$ (composizione di funzioni C^1)

Nel vostro caso $u \in C^2$ (della zona in cui $u \neq 0$).
Lì posso derivare e ottengo

$$(4u^3)' = 3u^2 \quad \leadsto \quad 12u^2 u' = 3u^2 \quad \leadsto \quad u' = \frac{u^2}{4u^2}$$

$\leadsto$ per bootstrap si conclude che $u \in C^\infty$ dove la sua derivata non si annulla.

Tuttavia, un pto in cui u si annulla esiste!!!

Lemma (analisi 1) Se $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e $|f(x)|^\alpha$ è Lipschitziana per un qualche $\alpha > 1$, allora f è $\frac{1}{\alpha}$ -Hölder.

Nel nostro caso abbiamo dim. che $(4u^3)' = 3u^2$

$\leadsto u \in C^0 \leadsto u$ è lip $\leadsto 3u^2$ è lip $\leadsto$
la sua primitiva lo è a maggior ragione $\leadsto 4u^3$ è
lip $\leadsto u$ è $\frac{1}{3}$ -Hölder.

$\leadsto u \in C^{1, 1/3}([0, T])$ (C^1 con derivata $\frac{1}{3}$ -Hölder)

Si potrebbe dimostrare che questa è la regolarità ottimale,
cioè

$$u \notin C^{1, \alpha}([0, T]) \quad \forall \alpha > \frac{1}{3}.$$

La perdita di regolarità è dovuta ad avere L_{pp} che si
può annullare. Se $L_{pp} > 0$ sempre, allora il bootstrap ci
porta fin dove si può

$$[L_p(x, u, u)]' = L_s(x, u, u)$$

$$L_{px}(x, u, u) + L_{ps}(x, u, u) u' + L_{pp}(x, u, u) u'' = L_s(x, u, u)$$

Se $L_{pp} > 0$ sempre, allora posso ricavare u'' in funzione
del resto, ed è fatta.

I passi iniziali sono i soliti

- $u \in L^2 \leadsto u \in C^0 \leadsto \text{RHS} \in L^2 \leadsto L_p(x, u, u) \in C^0$
 $\leadsto$ (se $L_{pp} > 0$) posso ricavare $u' \in C^0 \leadsto \text{RHS} \in C^0$
 $\leadsto \text{LHS} \in C^1 \leadsto$ posso ricavare $u \in C^1 \leadsto \text{RHS} \in C^1$
e così via.

— o — o —

Esempio

$$\min \left\{ \int_0^T (1+u^4) \dot{u}^2 + \sin u : u(0) = u(T) = 0 \right\}$$

① $u_0(x) \equiv 0$ è minimo?

No! Non risolve nemmeno (ELE)

② Esiste il minimo?

Sì! Metodo diretto

La compattatezza è quasi gratis

$$M \geq F(u) \geq \int_0^T \dot{u}^2 - 1 \geq \int_0^T \dot{u}^2 - T$$

$$\leadsto F(u) \leq M \Rightarrow \|\dot{u}\|_{L^2}^2 \leq M + T$$

La SCI è più delicata. Sul sin u è banale. Mi serve che

$$\liminf \int_0^T (1+u_n^4) \dot{u}_n^2 \geq \int_0^T (1+u_\infty^4) \dot{u}_\infty^2$$

$$(1+u_n^4) \dot{u}_n^2 = (1+u_\infty^4) \dot{u}_\infty^2 + (u_n^4 - u_\infty^4) \dot{u}_n^2$$

Il secondo termine, quando integrato, tende a 0.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T (u_n^4 - u_\infty^4) \dot{u}_n^2 \right| &\leq \int_0^T |u_n^4 - u_\infty^4| \cdot |\dot{u}_n|^2 \\ &\leq \underbrace{\|u_n^4 - u_\infty^4\|_{L^\infty}}_{\downarrow 0} \underbrace{\int_0^T |\dot{u}_n|^2}_{\text{limitato}} \end{aligned}$$

L'altro termine lo riscivo con la solita stima

$$\begin{aligned} \int_0^T (1+u_\infty^4) \dot{u}_m^2 &= \int_0^T (1+u_\infty^4) (\dot{u}_\infty + \dot{u}_n - \dot{u}_\infty)^2 \\ &\geq \int_0^T (1+u_\infty^4) \dot{u}_\infty^4 + \int_0^T \underbrace{(1+u_\infty^4) \dot{u}_\infty}_{\downarrow} \underbrace{(\dot{u}_n - \dot{u}_\infty)}_{\downarrow \text{debole } L^2} \end{aligned}$$

se questo è fisso
in L^2 , allora Ok, e
lo è essendo prodotto di
roba continua per L^2 .

Oss. Questo andava bene per

$$\int_a^b f(x, u(x)) |u'|^p$$

purché $p > 1$ (superlineare) e f continua e ≥ 0 .

— o — o —