

Rivisitazione teoremi semicontinuità e compattezza

Parole chiave : $\rightarrow$ convergenza debole in $L^p((a,b))$
 $\rightarrow$ ipotesi di crescita

Esempio $\min \left\{ \int_0^7 u^4 + u^3 : u(0) = u(7) = 0 \right\}$

Oss. La funzione $u_0(x) \equiv 0$ non è p.to di minimo, anzi non è nemmeno WLM e nemmeno DLM.

Presa una qualunque v che si annulla in 0 e 7 e ≥ 0 altrove, ad esempio

$$v(x) = x(7-x)$$

Allora

$$F(-tv) = t^4 \int_0^7 v^4 dx - t^3 \int_0^7 v^3 dx$$

$\uparrow$
costante

per $t > 0$ piccoli $F(-tv) < 0$.

Proviamo ad impostare il metodo diretto.

Speranza : da $F(u) \leq M_1$ dedurre $\int_0^7 u^4 \leq M_2$

Al solito modo, se controllo $\|u\|_{L^4}$, allora controllo la costante di $\frac{3}{4}$ -Hölder di u ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u\|_{L^4} |x-y|^{3/4}$$

Grazie alle BC deduciamo $|u(x)| \leq 7^{3/4} \|u\|_{L^4}$

da cui

$$\left| \int_0^7 u^3(x) dx \right| \leq 7^{\frac{9}{4}} \cdot 7 \|u\|_{L^4}^3$$

Da qui si conclude al solito modo

$$\begin{aligned} M \geq F(u) &= \|u\|_{L^4}^4 + \int_0^7 u^3(x) dx \\ &\geq \|u\|_{L^4}^4 - 7 \cdot 7^{\frac{9}{4}} \|u\|_{L^4}^3 \end{aligned}$$

Basta osservare che $\varphi(s) = s^4 - \text{cost } s^3$ tende a $+\infty$ per $s \rightarrow \pm\infty$, quindi da una stima su $\varphi(s)$ deduco una stima su s .

$$F(u) \leq M \quad \Rightarrow \quad \|u\|_{L^4} \leq M_2$$

— o — o —

Da una stima L^4 posso dedurre una stima L^2

Dim. $x^2 \leq x^4 + 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (senza entrambi)

$$\int_a^b f(x)^2 dx \leq \int_a^b (f(x)^4 + 1)$$

$$\|f\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^4}^4 + (b-a)$$

$$\leadsto \|u\|_{L^2} \leq M_3$$

Quindi per compattezza debole abbiamo

$$F(u_n) \leq M \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_k \rightarrow v_0 \text{ in } L^2$$

Usando Ascoli - Arzelà come sempre arriviamo a, eventualmente passando ancora a s. succ.,

$$u_{m_k} \rightarrow u_\infty \quad \text{unif. in } [a,b]$$

$$u_{m_k} \rightarrow u_\infty \quad \text{debole in } L^2$$

Domande: ① $u_\infty \in L^4((0, \pi))$?

$$\text{② vale la sci: } \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi u_{n_k}^4 \geq \int_0^\pi u_\infty^4 ?$$

Convergenza debole in $L^p(a,b)$

Def Sia $f_n \in L^p(a,b)$ una succ. e sia $f_\infty \in L^p(a,b)$ un'altra funzione.

Si dice che

$$f_n \rightarrow f_\infty \quad \text{in } L^p(a,b)$$

se

$$\int_a^b f_n(x) \varphi(x) dx \rightarrow \int_a^b f_\infty(x) \varphi(x) dx$$

per ogni $\varphi \in L^q(a,b)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Oss. Vale anche se $p=1$ e $q=+\infty$.

Oss. Più aumento p , più diminuisco q , quindi aumento le funzioni test ammissibili, quindi convergere debolmente diventa più difficile.

ERGO: la conv. più debole di tutte è la debole L^1
(ha solo funzioni test L^∞)

— o — o —

Teorema Supponiamo che

$$v_n \longrightarrow v_\infty \text{ debole in } L^1((a,b))$$

Sia $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

Allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi(v_n(x)) dx \geq \int_a^b \psi(v_\infty(x)) dx.$$

Dim in un caso speciale

Supponiamo in aggiunta $\psi \in C^1$ e $\psi'(p)$ limitata.

Uso la disuguaglianza

$$\psi(a+b) \geq \psi(a) + \psi'(a)b \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(v_n(x)) dx &= \int_a^b \psi(v_\infty(x) + \underbrace{v_n(x) - v_\infty(x)}_b) dx \\ &\geq \int_a^b \psi(v_\infty(x)) dx + \int_a^b \underbrace{\psi'(v_\infty(x))}_{\substack{\uparrow \\ \text{funzione test} \\ L^\infty}} \underbrace{(v_n(x) - v_\infty(x))}_{\substack{\uparrow \\ \text{tende a 0} \\ \text{debole in } L^1}} dx \end{aligned}$$

Passando al limite ho
la tesi.

Dim. caso generale

Approssimo ψ dal basso con una famiglia di funzioni ψ_ε convesse, C^1 , con derivata limitata

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi(v_n(x)) dx &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_\varepsilon(v_n(x)) dx \\ &\geq \int_a^b \psi_\varepsilon(v_\infty(x)) dx \end{aligned}$$

Concludo con Beppo Levi se $\psi_\varepsilon \nearrow \psi$ crescendo.

Tornando all'esempio, ora sappiamo che

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_a^b e_{i_{n_k}}(x)^4 dx \geq \int_a^b e_{i_\infty}(x)^4 dx$$

Questo risponde alle 2 domande.

— o — o —

Domanda: è vero che $e_{i_{n_k}} \rightarrow e_{i_\infty}$ in $L^4((0, \pi))$?

Prop. Sia f_n una successione e sia f_∞ una funzione.

Supponiamo che

(i) $\|f_n\|_p \leq M$ (limitate in L^p)

(ii) $f_n \rightarrow f_\infty$ in L^1 (conv. debole L^1)

Allora $f_\infty \in L^p$ e $f_n \rightarrow f_\infty$ in L^p .

Dim. L'appartenenza ad L^p è conseguenza del te. prec.

con $\psi(x) = |x|^p$.

Per verificare la conv. debole L^p , prendo una funzione test $\varphi \in L^q$.

Approssimo φ in L^q con una funzione $\varphi_\varepsilon \in L^\infty$.

Vediamo cosa succede

$$\int_a^b f_n(x) \varphi(x) = \int_a^b f_n(x) \varphi_\varepsilon(x) + \underbrace{\int_a^b f_n(x) (\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x))}_{\text{in valore assoluto è}}$$

$$\leq \|f_n\|_{L^p} \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_{L^q}$$

$$\leq M \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_{L^q}$$

Allo stesso modo ottengo

$$\int_a^b (f_n - f_\infty) \varphi = \int_a^b (f_n - f_\infty) \varphi_\varepsilon + \underbrace{\int_a^b (f_n - f_\infty) (\varphi - \varphi_\varepsilon)}_{\substack{\downarrow \\ \text{perché } \varphi_\varepsilon \in L^\infty}} \leq \|f_n - f_\infty\|_{L^p} \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_{L^q} \leq 2M \cdot \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_{L^q}$$

Ho usato che $\|f_n - f_\infty\|_{L^p} \leq \|f_n\|_{L^p} + \|f_\infty\|_{L^p} \leq M + M = 2M$

segue dal teo. precedente

La conclusione è standard:

• dato $\varepsilon > 0$, scelgo φ_ε in modo tale che $\|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_{L^q} \leq \varepsilon$

• poi scelgo n abbastanza grande in modo che

$$\left| \int_a^b (f_n - f_\infty) \varphi_\varepsilon \right| \leq \varepsilon$$

Per questi n vale $|LHS| \leq \varepsilon + 2M\varepsilon$.

Con il semio di poi

$$(a+b)^4 \geq a^4 + 4a^3b \quad (\text{solita convessità})$$

$$\begin{aligned} \int_a^b u_n(x)^4 &= \int_a^b (\overbrace{u_\infty}^a + \overbrace{u_n - u_\infty}^b)^4 \\ &\geq \int_a^b u_\infty^4 + 4 \int_a^b u_\infty^3 \cdot \underbrace{(u_n - u_\infty)}_{\substack{\uparrow \\ \text{tende a 0 debole } L^4}} \end{aligned}$$

per pmo caso 😊 questo sta in $L^{4/3}$ e quindi tutto questo integrale tende a 0.

Occhio! Questa dimostrazione usa già di sapere che $u_\infty \in L^4$, cosa che abbiamo dimostrato passando attraverso l'approx. dal basso con le convergenze con derivata limitata.

— o — o —

Oss. finale Abbiamo dimostrato (basandoci su L^2) che ogni succ. f_n limitata in L^p con $p \geq 2$ ha una s.succ. che converge debolmente L^2 , ma anche debolmente L^p , ad una certa f_∞ .

— o — o —