

Funzionali integrali con integrali multipli

$$F(u) = \int_{\Omega} \underbrace{(u_x^2 + u_y^2)}_{|\nabla u|^2} dx dy$$

funzionale
di Dirichlet

dove $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ma $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

Ora DBC vuol dire assegnare i valori di u su tutta $\partial\Omega$.

Oss. In dim. > 1 i valori di u in p.ti singoli non vengono presi in considerazione dal funzionale.

Ad esempio, se consideriamo

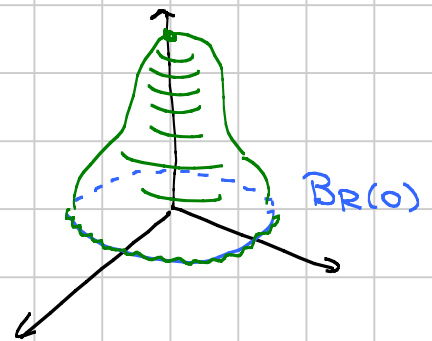
$$\min \{ F(u) : u \in C^1(B_R(0)) \text{ e } u(0,0) = 2017 \}$$

↑
quello di prima con
 $\Omega = \text{cerchio}$

e $u(x,y) = 0$ su $\partial B_R(0)$

Quello che succede è che $\inf = 0 !!!$

Esercizio: costruire una succ.
minimizzante, cioè f.c.
 $F(u_n) \rightarrow 0.$



Moralmente: le condizioni, per essere viste, devono essere assegnate su insiemi di dimensione almeno $n-1$.

— o — o —

Metodo indiretto per funzionali con integrali multipli

Nell'esempio di sopra, considero $\varphi(t) := F(u_0 + tv)$
con v nulla al bordo

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \int_{\Omega} |\nabla(u_0 + tv)|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u_0 + t \nabla v|^2 \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 + 2t \int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle + t^2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2\end{aligned}$$

Derivo e sostituisco $t=0$ e trovo

$$\delta F(u_0, v) = 2 \int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle \quad \forall v \in \dots$$

1^a forma
integrale di
ELE

Analisi 2 : Gauss - Green

normale esterna a $\partial\Omega$

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle$$

dove f è una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

e $\vec{E}$ è una funzione vettoriale $E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

Applico Gauss-Green con $f := v$, $\vec{E} := \nabla u_0$. Ottengo

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle = \int_{\partial\Omega} \underbrace{v}_{=0} \langle \nabla u_0, \vec{n} \rangle d\sigma - \int_{\Omega} v \cdot \underbrace{\operatorname{div}(\nabla u_0)}_{\Delta u_0}$$

Quindi

$$\delta F(u_0, v) = -2 \int_{\Omega} \Delta u_0 v \, dx$$

2^a forma
integrale di
ELE

Applicando FLCV (stessa dim. in qualunque dimensione):

$$\delta F(u_0, v) = 0 \quad \forall v \in \dots \Leftrightarrow \Delta u_0 = 0$$

In conclusione abbiamo trovato

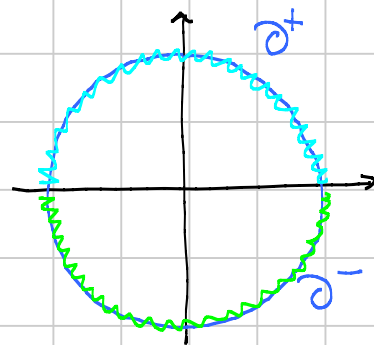
$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0 & \text{in } \Omega & \text{(ELE) differenziale} \\ u_0(x) = \text{date} & \text{su } x \in \partial\Omega & \text{DBC} \end{cases}$$

— o — o —

1a variante Cosa accade se non metto DBC, o se ne metto solo un po'.

Esempio $\Omega = B_R(0,0)$

$$\min \left\{ \int_{\Omega} u_x^2 + u_y^2 : u(x,y) = x^2 \text{ su } \partial^+ \right\}$$



Procediamo come prima e arriviamo a

$$\delta F(u_0, v) = 2 \int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle \quad \forall v \in C^\infty \text{ e nulla su } \partial^+$$

Integro per parti con G.G. e trovo

$$\delta F(u_0, v) = -2 \int_{\Omega} \Delta u_0 \cdot v + \int_{\partial\Omega} v \cdot \langle \nabla u_0, \vec{n} \rangle d\sigma$$

Supponiamo u_0 p.to di min. Limitandoci alle $v \in C_c^\infty$ si annulla il termine di bordo e al solito modo si arriva a

$$\Delta u_0 = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{(ELE) differenziale.}$$

Ora considerando le v più generali troviamo

$$\int_{\partial\Omega} v \langle \nabla u_0, \vec{n} \rangle d\sigma = 0 \quad \forall v \in C^\infty \text{ e nulla su } \partial^+$$

Ora si applica una specie di FLCV su ∂^- e si deduce che

$$\langle \nabla u_0, \vec{n} \rangle = 0 \quad \text{su } \partial^-$$

"
 $\frac{\partial u_0}{\partial \vec{n}}$ (derivata direzionale di u_0 nella direzione $\vec{n}$)

Abbiamo quindi trovato le condizioni

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0 & \text{in } \Omega & \text{ELE diff. dentro} \\ u_0 = x^2 & \text{su } \partial^+ & \text{DBC imposta all'inizio} \\ \frac{\partial u_0}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{su } \partial^- & \text{NBC nota strada facendo} \\ & & \text{(derivata normale nulla dove non} \\ & & \text{avevamo imposto DBC)} \end{cases}$$

Oss. Ammesso di saper risolvere il pbm, posso dire al solito modo che si tratta di un p.to di min. (in realtà pure unico)

Sia w un altro competitore. Pongo $v := w - u_0$. Allora

$$F(w) = F(u_0 + v) = \underbrace{\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2}_{F(u_0)} + \underbrace{2 \int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla v \rangle}_0 + \underbrace{\int_{\Omega} |\nabla v|^2}_{\geq 0}$$

perché è la 1ª forma integrale di ELE

(nullo $\Leftrightarrow v \equiv 0$)

— 0 — 0 —

2ª variante

$$F(u) := \int_{\Omega} L(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

↑ vettore $L(x, s, p_1, \dots, p_m)$

Come sempre pongo $\varphi(t) := F(u_0 + t v)$ e derivando trovo

$$\varphi(t) = \int_{\Omega} L(x, u_0(x) + t v(x), \nabla u_0(x) + t \nabla v(x)) dx$$

$$\varphi'(0) = \int_{\Omega} L_s(x, u_0, \nabla u_0) v + \langle \nabla_p L(x, u_0, \nabla u_0), \nabla v \rangle$$

$\uparrow$
 ∇L rispetto alle variabili
 $p_1, \dots, p_m$

e questa è la prima forma integrale.

Ora integriamo per parti il 2° termine e se $v \equiv 0$ su $\partial\Omega$ otteniamo

$$\delta F(u_0, v) = \int_{\Omega} L_s(x, u_0, \nabla u_0) v - \operatorname{div}(\nabla_p L(x, u_0, \nabla u_0)) v$$

e questa è la seconda forma integrale.

Con FLCV si arriva alla ELE differenziale

$$\operatorname{div}(\nabla_p L(x, u_0, \nabla u_0)) = L_s(x, u_0, \nabla u_0)$$

Le eventuali NBC date su the road sono del tipo

$$\nabla_p L(x, u_0, \nabla u_0) = 0 \quad \text{sugli opportuni pezzi di } \partial\Omega$$

Esempio $\int_{\Omega} (ux^2 + uy^4 + u^3)$

$$\operatorname{div}(2ux, 4uy^3) = 3u^2$$

$$(2ux)_x + (4uy^3)_y = 3u^2$$

$$2u_{xx} + 12uy^2u_{yy} = 3u^2 \quad (\text{ELE diff.})$$

Per esercizio provare con $\int_{\Omega} (u^2ux^2 + uy^4 + u^3)$

$$\dots \underbrace{(2u^2ux)}_0 \underbrace{+ (4uy^3)_y}_0 = 3u^2 \dots$$