

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Analisi 2 Supponiamo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f: B_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$

$$g: B_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$$

due funzioni date, diciamo di classe C^1 . Poniamo

$$V := \{ x \in B_r(x_0) : g(x) = g_0 \}$$

$\uparrow$ costante

e supponiamo $g(x_0) = g_0$ e x_0 sia p.to di min/max per f ristretta a V .

Allora accade almeno una delle seguenti 2 possibilità

(1) $\nabla g(x_0) = 0$,

(2) esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$

Oss. La (2) è equivalente a dire che x_0 è p.to stazionario (non vincolato) per la funzione di $n+1$ variabili

$$\Phi(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x)$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $n \text{ var.} \quad 1 \text{ var.}$
— o — o —

Con i funzionali vale un risultato analogo.

Setting : problemi di minimo vincolato del tipo

$$\min \{ F(u) : u \in \text{certa classe con o senza BC e } G(u) = G_0 \}$$

$\uparrow$ funzionale da minimizzare $\uparrow$ vincolo che coinvolge un altro funzionale

$$\min \left\{ \int_0^1 u^2 dx : u(0) = 7, \int_0^1 u^4 dx = 8 \right\}$$

Teorema Sotto ipotesi ragionevoli (esistenza delle variazioni prime), se u_0 è un p.to di min., allora vale almeno una delle seguenti 2 possibilità:

- (1) $\delta G(u_0, v) = 0$ per ogni $v \in C_c^\infty$ (o comunque ammissibile)
 (2) esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\delta F(u_0, v) = \lambda \delta G(u_0, v) \quad \forall v \in C_c^\infty$$

è il moltiplicatore di Lagrange ed è lo stesso per ogni v ammissibile

Oss. La (2) è come dire che $\delta \Phi(u_0, v) = 0$ per ogni v ammissibile, dove

$$\Phi(u) = F(u) - \lambda G(u).$$

Lemma (trivial) Se u_0 è p.to stazionario per $\Phi(u)$ ed è un p.to di min. per $\Phi(u)$, allora u_0 è p.to di min. per il problema vincolato (COND. SUFF. MA NON NEC.)

Dim. Prendo una qualunque w che soddisfi il vincolo, cioè

$$G(w) = G_0 = G(u_0).$$

Allora

$$F(w) = \Phi(w) + \lambda G(w) \geq \Phi(u_0) + \lambda G(u_0) = F(u_0)$$

$\uparrow$ defn. di $\Phi(w)$ $\uparrow$ $\Phi(w) \geq \Phi(u_0)$ perché u_0 è p.to di min. $\uparrow$ defn. di $\Phi(u_0)$
 $G(w) = G(u_0)$

— o — o —

Dim. uolt. Lagrange: $\rightarrow$ via teo. funzione implicita
 $\rightarrow$ via teo. funzione inversa
 $\rightarrow$ via penalizzazione (vedi les. sulla Gamma-convergenza)

Dim. via funz. implicita Se $\delta G(u_0, v) = 0$ sempre, allora non c'è nulla da dimostrare.

Supponiamo allora che esista w ammissibile t.c.

$$\delta G(u_0, w) \neq 0.$$

Poniamo

$$f(t, s) := F(u_0 + tv + sw)$$

$$g(t, s) := G(u_0 + tv + sw)$$

dove w è quella di sopra e v è una qualunque altra variazione ammissibile.

Osservo che

$$g(0, 0) = G(u_0) = G_0$$

$$g_s(0, 0) = \delta G(u_0, w) \neq 0.$$

Per il teo. delle funz. implicite posso ricavare s , cioè esiste

$$s: (-\delta_0, \delta_0) \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che $s(0) = 0$ e $g(t, s(t)) = G_0$. Questo dice che $u_0 + tv + s(t)w$ è un competitore per ogni $t \in (-\delta_0, \delta_0)$ e quindi

$$\frac{d}{dt} F(u_0 + tv + s(t)w) = \frac{d}{dt} f(t, s(t)) = 0 \text{ per } t=0$$

Questa è

$$f_t(0, 0) + s'(0) f_s(0, 0)$$

$\delta F(u_0, v)$ $\uparrow$ $\delta F(u_0, w)$
 si calcola con teo. funz. implicite

$$s'(0) = - \frac{g_t(0,0)}{g_s(0,0)} = - \frac{\delta G(u_0, v)}{\delta G(u_0, w)}$$

Quindi

$$\delta F(u_0, v) - \frac{\delta G(u_0, v)}{\delta G(u_0, w)} \cdot \delta F(u_0, w) = 0$$

da cui

$$\delta F(u_0, v) = \boxed{\frac{\delta F(u_0, w)}{\delta G(u_0, w)}} \cdot \delta G(u_0, v)$$

"
λ involip.
da v.

— 0 — 0 —

Dim. via teo. funzione inversa

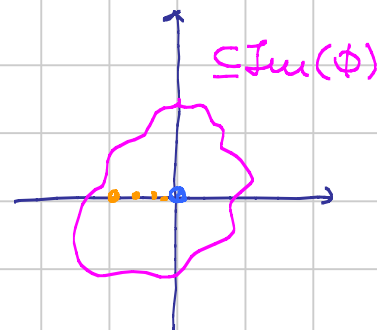
Come prima arriviamo a definire $w, f(t, s), g(t, s)$

Costruisco la funzione

$$\Phi(t, s) := (f(t, s) - f(0, 0), g(t, s) - g_0)$$

Osservo che Φ è definita in un intorno di $(0, 0)$ in $\mathbb{R}^2$ ed è a valori in $\mathbb{R}^2$. Osservo anche

$$\Phi(0, 0) = (0, 0)$$



Involve

$$\begin{aligned} J\Phi(0, 0) &= \begin{pmatrix} f_t(0, 0) & f_s(0, 0) \\ g_t(0, 0) & g_s(0, 0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta F(u_0, v) & \delta F(u_0, w) \\ \delta G(u_0, v) & \delta G(u_0, w) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Supponiamo che $J\Phi(0,0)$ abbia rango 2. Allora è invertibile in un intorno dell'origine, ed in particolare l'immagine contiene un intorno di $(0,0)$.

In particolare esiste una successione $(t_n, s_n) \rightarrow (0,0)$ tale che

$$\Phi(t_n, s_n) = \left(-\frac{1}{n}, 0\right) \text{ definitivamente}$$

$$\uparrow$$

$$g(t_n, s_n) = 0, \text{ cioè}$$

$$G(u_0 + t_n v + s_n w) = G_0$$

$$f(t_n, s_n) = f(0,0) - \frac{1}{n}$$

$$F(u_0 + t_n v + s_n w) = F(u_0) - \frac{1}{n}$$

e questo uga che u_0 sia p.to di min. locale ristretto al vincolo.

Allora $J\Phi(0,0)$ non può avere rango = 2, quindi ha $\det = 0$, e si ottiene la stessa relazione della dim. precedente.

— o — o —

Esercizio Estendere la dim. precedente al caso di più vincoli.

— o — o —

Esempio classico (legato ai funz. quadratici $\int_0^1 \dot{u}^2 - c \cdot u^2$)

$$\min \left\{ \underbrace{\int_0^1 \dot{u}^2 dx}_{F(u)} : u(0) = u(1) = 0, \underbrace{\int_0^1 u^2 dx = 1}_{G(u)} \right\}$$

Volendo con un metodo diretto si vede che il minimo esiste, ma per ora diamolo per buono.

Esaminiamo le 2 possibilità. Sia u_0 un p.to di min.

$$\boxed{1} \quad \delta G(u_0, v) = 0 \text{ sempre}$$

(ELE) di G

$(2\ddot{u})' = 0$, cioè $\ddot{u} = 0$, cioè la retta. Date le BC l'unica retta compatibile è $u_0(x) \equiv 0$, che però non verifica il vincolo.

$$\boxed{2} \quad \delta F(u_0, v) = \lambda \delta G(u_0, v) \text{ per ogni } v \text{ ammissibile, o equivalentemente}$$

$$\delta(F - \lambda G)(u_0, v) = 0$$

(ELE) di $F - \lambda G$

$$(2\ddot{u})' = 2\lambda u \quad \leadsto \quad \ddot{u} = \lambda u$$

Ora devo trovare le soluzioni di

$$\begin{cases} \ddot{u} = \lambda u \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \\ \int_0^1 u^2(x) dx = 1 \end{cases}$$

3 costanti da determinare e 3 equazioni

Occorrerebbe sapere il segno di λ . Moltiplico la 1ª per u !

$$u \ddot{u} = \lambda u^2 \quad \leadsto \text{per parti} \quad - \int_0^1 \ddot{u}^2 = \int_0^1 u \ddot{u} = \lambda \int_0^1 u^2$$

$\uparrow$
BCs

$\leadsto \lambda < 0 \leadsto$ le soluzioni sono del tipo

$$u(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda} x)$$

$\overset{0}{\text{per BC}}$ $\sqrt{-\lambda} = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \text{ (per BC)}$

$u(x) = c_2 \sin(k\pi x)$ e si vede che quella che realizza il min. è quella con $k=1$.