

Condizione necessaria di W. per SLM

$$u_0(x) \text{ SLM} \Rightarrow E(x, u_0(x), u'_0(x), q) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall q \in \mathbb{R}$$

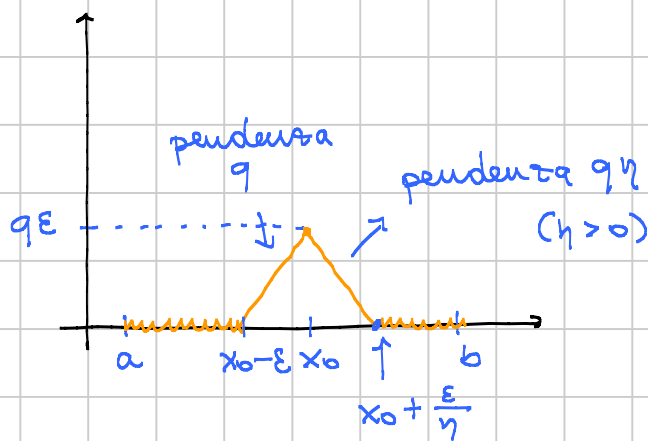
(W)

Dim. Considero la funzione v_ε come in figura.

Per ε piccolo è a spt. cpt. in $[a, b]$.

Considero $u_0 + v_\varepsilon$

Per ε piccolo sta in un intorno C^0 di u_0 dove u_0 è p.to di min.



$$F(u_0 + v_\varepsilon) \geq F(u_0) \quad \text{e in particolare} \quad \frac{1}{\varepsilon} (F(u_0 + v_\varepsilon) - F(u_0)) \geq 0$$

Vado a calcolare la differenza

$$F(u_0 + v_\varepsilon) - F(u_0) = \text{(gli integrali su 1^\circ \text{ e ultimo pezzo si semplificano)}}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0} L(x, u_0(x) + v_\varepsilon(x), u'_0(x) + q) dx + \\ &+ \int_{x_0}^{x_0 + \frac{\varepsilon}{\eta}} L(x, u_0(x) + v_\varepsilon(x), u'_0(x) + q\eta) dx \\ &- \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0} L(x, u_0(x), u'_0(x)) dx - \int_{x_0}^{x_0 + \frac{\varepsilon}{\eta}} L(x, u_0(x), u'_0(x)) dx \end{aligned}$$

Divido per ε , uso il teo. della media integrale, poi passo al limite

Il primo integrale diventa

$$L(x_\varepsilon, u_0(x_\varepsilon) + v_\varepsilon(x_\varepsilon), \dot{u}_0(x_\varepsilon) + q) \quad \text{per } x_\varepsilon \in [x_0 - \varepsilon, x_0]$$

Passando al limite viene $L(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0) + q)$.

Trattando in modo analogo gli altri termini, il limite viene:

$$\underbrace{L(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0) + q)}_{(1)} - \underbrace{L(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0))}_{(3)}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{\eta} L(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0) + q\eta)}_{(2)} - \underbrace{\frac{1}{\eta} L(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0))}_{(4)}$$

Mettendo insieme (2) e (4) ottengo

$$\frac{L(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0) + q\eta) - L(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0))}{\eta}$$

Passando al limite per $\eta \rightarrow 0^+$ ottengo

$$q L_p(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0))$$

Considerando che è limite di roba ≥ 0 ottengo proprio (w).

Cond. suff. di Weierstrass per (SLM)

$$(E) + (L^+) + (J^+) + (W^+) \Rightarrow u_0(x) \text{ è SLM.}$$

(W⁺) Esiste $\delta > 0$ t.c. $E(x, s, p, q) \geq 0$ per ogni

$$(x, s, p, q) \in [a, b] \times \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } |s - u_0(x)| \leq \delta$$

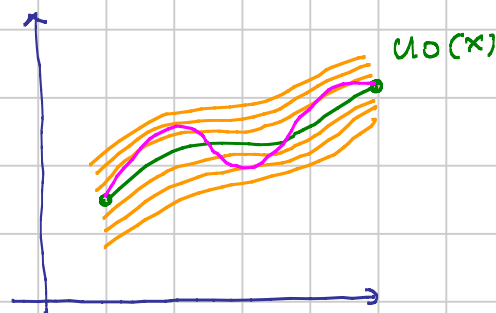
$$|p - \dot{u}_0(x)| \leq \delta$$

totalmente libero

$(WRF) \Rightarrow u_0(x)$ è SLM se vale (W^+)

$$F(v) - F(u_0) =$$

$$= \int_a^b E(x, v(x), p(x, v(x)), \dot{v}(x)) dx$$



Se il campo è abbastanza stretto, cioè il famoso ε_0 è abbastanza piccolo, allora $|v(x) - u_0(x)| \leq \delta$ e analogamente $|p(x, v(x)) - \dot{u}_0(x)| \leq \delta$

↑
derivata della curva del campo che passa per quel punto

La condizione (W^+) ci assicura che l'eccesso è positivo.

— o — o —

Cond. suff. di W segue dalle implicazioni

$$(E) + (L^+) + (J^+) \Rightarrow (F) \quad (\text{EMBEDDING THEOREM}).$$

$$(F) \Rightarrow (WRF)$$

$$(WRF) + (W^+) \Rightarrow u_0 \text{ è SLM}$$

— o — o —

NON DIM. DELL'EMBEDDING THEOREM

Devo trovare famiglia di soluzioni di (ELE) che "circonda" $u_0(x)$.

Idea: risolvo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (L_p)' = L_s & (ELE) \\ u(\varepsilon, a) = u_0(x) + \alpha \varepsilon \\ u_x(\varepsilon, a) = \dot{u}_0(x) + \beta \varepsilon \end{cases}$$

e spero che le soluzioni $u(\varepsilon, x)$ che ottengo vadano bene.

L'unica richiesta da verificare è che

$$u_\varepsilon(\varepsilon, x) > 0 \quad \text{in } [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times [a, b].$$

Per fare questo basta che

$$\mu_\varepsilon(0, x) > 0 \quad \text{in } [a, b]$$

Si tratta di calcolare la derivata di una soluzione rispetto al dato iniziale.

Dimostrazione non rigorosa: mi aspetto che

$$\mu(\varepsilon, x) = \mu_0(x) + \varepsilon w(x) + o(\varepsilon)$$

dove $w(x) = \mu_\varepsilon(0, x)$. Sostituisco in (ELE) trascurando o piccolo.

$$[L_p(x, \mu(\varepsilon, x), u_x(\varepsilon, x))] = L_s(x, u(\varepsilon, x), u_x(\varepsilon, x))$$

$$[L_p(x, u_0(x) + \varepsilon w(x), \dot{u}_0(x) + \varepsilon \dot{w}(x))] =$$

$$L_s(x, u_0(x) + \varepsilon w(x), \dot{u}_0(x) + \varepsilon \dot{w}(x))$$

Sviluppo con Taylor in ε :

$$[L_p(x, u_0, \dot{u}_0) + L_{ps}(x, u_0, \dot{u}_0) \varepsilon w + L_{pp}(x, u_0, \dot{u}_0) \varepsilon \dot{w}] =$$

$$= L_s(x, u_0, \dot{u}_0) + L_{ss}(x, u_0, \dot{u}_0) \varepsilon w + L_{sp}(x, u_0, \dot{u}_0) \varepsilon \dot{w}$$

I termini senza ε sono uguali per (ELE). Quando impongo l'uguaglianza tra gli altri

$$[\underbrace{L_{ps}(x, u_0, \dot{u}_0)}_{B_0''(x)} w + \underbrace{L_{pp}(x, u_0, \dot{u}_0)}_{C_0''(x)} \dot{w}] = \underbrace{L_{ss}(x, u_0, \dot{u}_0)}_{A_0''(x)} w + \underbrace{L_{sp}(x, u_0, \dot{u}_0)}_{B_0''(x)} \dot{w}$$

Risultato : w risolve (JDE) per il funzionale quadratico i cui coeff. sono quelli di $\delta^2 F(u_0, r)$

Scoperta : $u_\varepsilon(0, x)$ è la soluzione di (JDE) con dati iniziali $w(a) = \alpha$ e $\dot{w}(a) = \beta$.

Quindi cercare $u_\varepsilon(0, x) > 0$ in $[a, b]$ è equivalente a cercare una soluzione di (JDE) che non si annulla mai in $[a, b]$.

Questa è la condizione (J^{++}) , e avevamo visto che era implicata da (L^+) e (J^+) .

— o — o —

Se volessi un campo con in più $u(\varepsilon, a_0)$ fisso per ogni $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Basterebbe risolvere

(ELE)

$u(\varepsilon, a_0) = u_0(a_0)$ $\leftarrow$ suppongo di aver esteso $u_0(x)$ "indietro"

$$u_x(\varepsilon, a_0) = \dot{u}_0(a_0) + \varepsilon$$

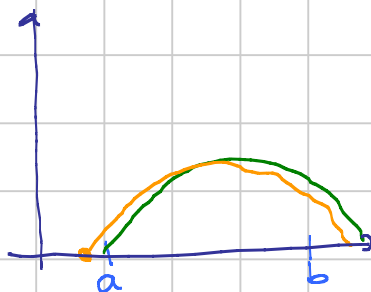
Quando calcolo $u_\varepsilon(0, x)$ questa viene la soluz. della (JDE) con dati $w(a_0) = 0$, $\dot{w}(a_0) = 1$, ma grazie a (L^+) e (J^+) sappiamo che per a_0 vicino ad a questa non si annulla in $[a, b]$.

— o — o —

Oss. Con gli stessi ragionamenti si ottiene la derivata di

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t, u) \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$

rispetto al parametro α . (Vedi conti anni precedenti)



Esercizio Vedere che nell'esempio di WLM che non è STM le cond. (w) e (w^+) falliscono.

IMPORTANTE

Se L è convessa in p , allora

$$E(x, s, p, q) \geq 0 \quad \text{SEMPRE}$$

— 0 — 0 —