

$$(F) \Rightarrow (WRF)$$

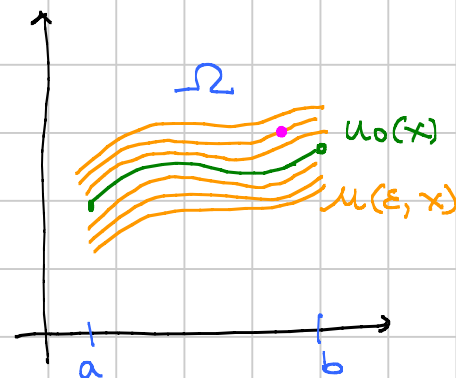
(F) esiste $\varepsilon_0 > 0$ ed esiste $u: [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$(i) \quad u(0, x) = u_0(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$(ii) \quad x \rightarrow u(\varepsilon, x) \text{ risolve (ELE)} \quad \forall \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$$

$$(iii) \quad u_\varepsilon(\varepsilon, x) > 0 \quad \forall (\varepsilon, x) \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times [a, b]$$

Pongo $\Omega := \text{immagine di } u(\varepsilon, x)$



SLOPE FUNCTION $p: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$p(x, s)$ è definita prendendo $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ t.c. $u(\varepsilon, x) = s$ e poi pongo

$$p(x, s) := u_x(\varepsilon, x)$$

↑
dipende da (x, s)

Dalla definizione segue che

$$p(x, u(\varepsilon, x)) = u_x(\varepsilon, x) \quad \forall (\varepsilon, x) \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times [a, b]$$

Oss. L'equazione precedente ci dice che se risolviamo $\dot{u} = p(x, u)$ troveremo proprio le funzioni $u(\varepsilon, x)$

Riscrittura di ELE in termini di slope function

$$\frac{d}{dx} L_p(x, u(\varepsilon, x), u_x(\varepsilon, x)) = L_s(x, u(\varepsilon, x), u_x(\varepsilon, x))$$

$$L_{px} + L_{ps} u_x + L_{pp} u_{xx} = L_s$$

Derivando la relazione fondamentale ottengo

$$p_x(x, u(\varepsilon, x)) + p_s(x, u(\varepsilon, x)) \underbrace{u_x(\varepsilon, x)}_p = u_{xx}(\varepsilon, x)$$

$$p_x + p_s p = u_{xx}$$

Andando a sostituire sopra trovo

$$L_{p_x} + L_{p_s} p + L_{pp} p_x + L_{pp} p_s p = L_s$$

Esercizio Riscrivere le formule precisando gli argomenti delle funzioni e dove variano.
— o — o —

WRF Sia $v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 con le stesse DBC di $u_0(x)$.

Allora

$$F(v) - F(u_0) = \int_a^b E(x, v(x), p(x, v(x)), \dot{v}(x)) dx$$

dove $E(x, s, p, q) := L(x, s, q) - L(x, s, p) - (q - p) L_p(x, s, p)$

Ci sono due dimostrazioni : $\rightarrow$ alla Hilbert
 $\rightarrow$ alla Weierstrass

Dim alla Hilbert Riscriviamo LHS e RHS

$$F(v) - F(u_0) = \int_a^b L(x, v(x), \dot{v}(x)) dx - \int_a^b L(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) dx$$

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \int_a^b L(x, v(x), \dot{v}(x)) dx - \int_a^b L(x, v(x), p(x, v(x))) dx \\ &\quad - \int_a^b (\dot{v}(x) - p(x, v(x))) L_p(x, v(x), \dot{v}(x)) dx \end{aligned}$$

Quindi la tesi è equivalente a

$$\begin{aligned} \int_a^b L(x, v(x), p(x, v(x))) + (\dot{v}(x) - p(x, v(x))) L_p(x, v(x), p(x, v(x))) dx \\ = \int_a^b L(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) dx \end{aligned} \quad (\star)$$

Considero una nuova Lagrangiana

$$\hat{L}(x, s, \underline{p}) = L(x, s, p(x, s)) + (\underline{p} - p(x, s)) L_p(x, s, p(x, s))$$

Osservo che in quello che voglio dire, cioè da $(\star)$, abbiamo

$$\text{LHS} = \int_a^b \hat{L}(x, v(x), \dot{v}(x)) dx$$

$$\text{RHS} = \int_a^b \hat{L}(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) dx \quad (\text{il secondo pezzo si cancella})$$

Per questo basta osservare che $p(x, u_0(x)) = \dot{u}_0(x)$

Osservo anche che

$$\hat{L}(x, s, p) = A(x, s)p + B(x, s), \quad \text{dove}$$

$$A(x, s) = L_p(x, s, p(x, s))$$

$$B(x, s) = L(x, s, p(x, s)) - p(x, s) L_p(x, s, p(x, s))$$

Ci basta dimostrare che $\hat{L}$ è un NULL LAGRANGIAN, cioè che

$$A_x(x, s) = B_s(x, s)$$

Calcolo le derivate

$$A_x = L_p x + L_{pp} p_x$$

$$B_s = L_s + \cancel{L_p p_s} - \cancel{p_s L_p} - p L_{ps} - p L_{pp} p_s$$

Mi resta da dim che

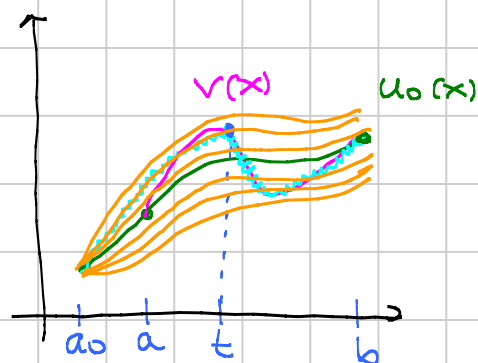
$$L_p x + L_{pp} p_x + L_{ps} p + L_{pp} p p_s = L_s$$

e questa è proprio ELE riscritta in Ω .

— o — o —

Dim. alla Weierstrass

Prendiamo come ipotesi ulteriore che tutte le $u(\varepsilon, x)$ abbiano lo stesso valore per un qualche $a_0 < a$.



Sia $v(x)$ come nella WRF. Per ogni $t \in [a, b]$ considero

$$w: [a_0, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$w(x) = \begin{cases} u(\varepsilon(t), x) & \text{per } x \in [a_0, t] \\ v(x) & \text{per } x \in [t, b] \end{cases}$$

dove $\varepsilon(t)$ è definito in modo tale che

$$u(\varepsilon(t), t) = v(t).$$

Osservo che derivando rispetto a t trovo

$$u_\varepsilon(\varepsilon(t), t) \varepsilon_t(t) + u_x(\varepsilon(t), t) = \dot{v}(t)$$

Pongo

$$\begin{aligned}\Phi(t) &:= \int_{a_0}^b L(x, w(x), \dot{w}(x)) dx \\ &= \int_{a_0}^t L(x, u(\varepsilon(t), x), u_x(\varepsilon(t), x)) dx \\ &\quad + \int_t^b L(x, v(x), \dot{v}(x)) dx\end{aligned}$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}\Phi(a) &= \int_{a_0}^a L(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) dx + \int_a^b L(x, v(x), \dot{v}(x)) dx \\ \Phi(b) &= \qquad \qquad \qquad + \int_a^b L(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) dx\end{aligned}$$

$$F(v) - F(u_0) = \Phi(a) - \Phi(b) = - \int_a^b \Phi'(t) dt$$

Quindi devo dim. che $\Phi'(t) = -E(t, v(t), p(t, v(t)), \dot{v}(t))$
cioè

$$\Phi'(t) = \underbrace{-L(t, v(t), \dot{v}(t))}_1 + \underbrace{L(t, v(t), p(t, v(t)))}_2 + \underbrace{(\dot{v}(t) - p(t, v(t))) L_p(t, v(t), p(t, v(t)))}_3$$

Basta fare una derivata: La derivata di Φ ha 3 termini

→ 2° cut. derivato: $\underbrace{-L(t, v(t), \dot{v}(t))}_1$ 😊

→ 1° cut. risp. estremo: $\underbrace{L(t, u(\varepsilon(t), t), u_x(\varepsilon(t), t))}_2$ 😊
 $\quad \quad \quad \underbrace{v''(t) \quad p(t, v(t))}_{\quad}$

→ 1° integrale derivato dentro

$$\int_{a_0}^t (L_s u_\varepsilon \varepsilon_t + L_p \underbrace{u_{x\varepsilon}}_{\varepsilon_t L_p u_{\varepsilon x}} \varepsilon_t) dx$$

"
 $\varepsilon_t L_p u_{\varepsilon x} \rightsquigarrow$ integrale per parti

$$= \int_{a_0}^t \underbrace{L_s u_\varepsilon \varepsilon_t - \varepsilon_t (L_p)' u_\varepsilon}_{=0 \text{ per (ELE)}} + [\varepsilon_t L_p u_\varepsilon]_{a_0}^t$$

In $x=a_0$ si ha che $u_\varepsilon \equiv 0$ (tutte le soluzioni passano per lo stesso punto)

Quindi resta solo

$$L_p(\dots) \underbrace{\varepsilon_t u_\varepsilon}_{\substack{\uparrow \\ \text{calcolato} \\ \text{sopra}}} = L_p(\dots) \underbrace{(\dot{v}(t) - u_x(\varepsilon(t), t))}_{\substack{\text{3} \\ \underbrace{\quad \quad \quad}_{\substack{v''(t) \quad p''(t, v(t))}}}} \\ \underbrace{\quad \quad \quad}_{\substack{v''(t) \quad p''(t, v(t))}} \\ \text{--- o --- o ---}$$