

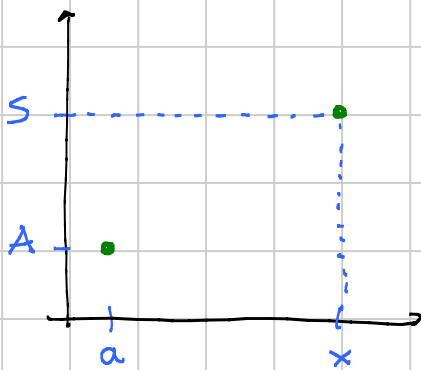
VALUE FUNCTION

Consideriamo il solito pbm

$$\min \left\{ \int_a^b L(x, u(x), \dot{u}(x)) dx : u(a) = A, u(b) = B \right. \\ \left. u \in C^1([a, b]) \right\}$$

Considero un pbm. più generale, usando la seconda DBC come parametro

$$V(x, s) := \min \left\{ \int_a^x L(t, u(t), \dot{u}(t)) dt : u(a) = A \right. \\ \left. u(x) = s \right. \\ \left. u \in C^1([a, x]) \right\}$$



$V(b, B)$ è quello che voglio.

Teorema (Calibrazione via VALUE FUNCTION)

Supponiamo che la $V(x, s)$ definita sopra sia di classe C^1 (occhio: può venire NON C^1 anche se L è di classe C^∞).

Allora

$$\hat{L}(x, s, p) := V_s(x, s) p + V_x(x, s)$$

verifica le ipotesi del teo. di calibrazione.

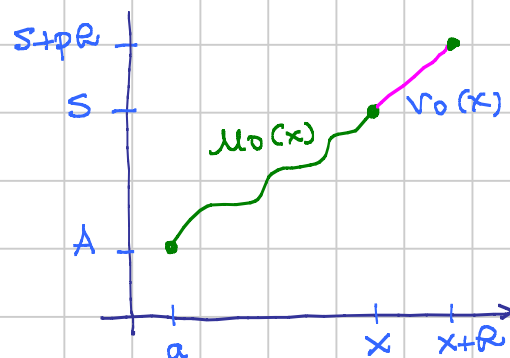
Dim. I coeff. $A(x, s)$ e $B(x, s)$ sono le derivate parziali della $V(x, s)$, quindi (i) è gratis.

(ii) Devo dimostrare che

$$L(x, s, p) \geq V_s(x, s) p + V_x(x, s) \quad \forall (x, s, p) \in \dots$$

Sia $u_0(x)$ il pto di min. relativo al pbm. con dati (x, s) , cioè

$$V(x, s) = \int_a^x L(t, u_0(t), \dot{u}_0(t)) dt$$



Chi realizza il min. con dati $(x+R, s+pR)$?

Un competitore naturale è $u_0(x)$ + segmento

$$V(x+R, s+pR) \leq V(x, s) + \int_x^{x+R} L(t, v_0(t), \dot{v}_0(t)) dt$$

da cui

$$\frac{V(x+R, s+pR) - V(x, s)}{R} \leq \frac{1}{R} \int_x^{x+R} L(t, v_0(t), \underbrace{\dot{v}_0(t)}_{\equiv p}) dt$$

$$(\text{Teo. media integr.}) = L(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{compreso tra } x \text{ e } x+R}}{t_0}, v_0(t_0), \dot{v}_0(t_0))$$

Passo al limite per $R \rightarrow 0^+$.

$$\text{RHS} \rightarrow L(x, s, p)$$

$$\text{LHS} \rightarrow V_x(x, s) + V_s(x, s)p \quad (\text{derivata direzionale di } V)$$

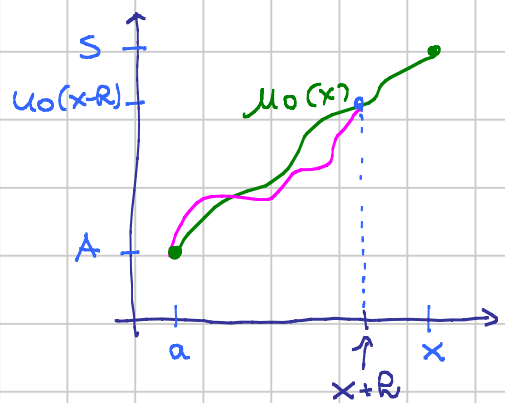
$\text{LHS} \leq \text{RHS}$ è la disuguaglianza voluta.

(iii) Devo dimostrare che, se $u_0(x)$ realizza il minimo per un certo dato finale (x, s) , allora vale

$$L(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) = V_x(x, u_0(x)) + V_s(x, u_0(x)) \dot{u}_0(x)$$

Consideriamo il dato finale

$$(x+R, u_0(x+R)) \quad R < 0.$$



Chi realizza il min. per questo dato finale?

La restrizione di $u_0(x)$!!!

Se ci fosse qualcosa di meglio tra a e $x+R$, potrei usarlo per migliorare il risultato fino a (x, s) !!!

Da qui deduciamo che

$$V(x+R, u_0(x+R)) = \int_a^{x+R} L(t, u_0(t), \dot{u}_0(t)) dt \quad \forall R < 0 \text{ piccolo}$$

Derivo LHS e RHS rispetto ad R , e poi pongo $R=0$

$$V_x(x, u_0(x)) + V_s(x, u_0(x)) \dot{u}_0(x) = L(x, u_0(x), \dot{u}_0(x))$$

e questa è l'uguaglianza richiesta, che vale su tutta la traiettoria.

— o — o —

Dato $u_0(x)$ candidato min. con DBC $u(a)=A$ e $u(b)=B$, come dimostro che è p.to di min.?

Se mi sento fortunato, o molto bravo, al p.to di sapere trovare il p.to di min. per ogni condizione finale $u(x)=s$, allora calcolo quella che dovrebbe essere $V(x, s)$ e poi verifico a mano che soddisfa la disug. (ii) e l'uguaglianza (iii).

— o — o —

Esempio Solito pbm

$$\min \left\{ \int_0^1 u'(x)^2 dx : u(0)=0, u(1)=3 \right\}$$

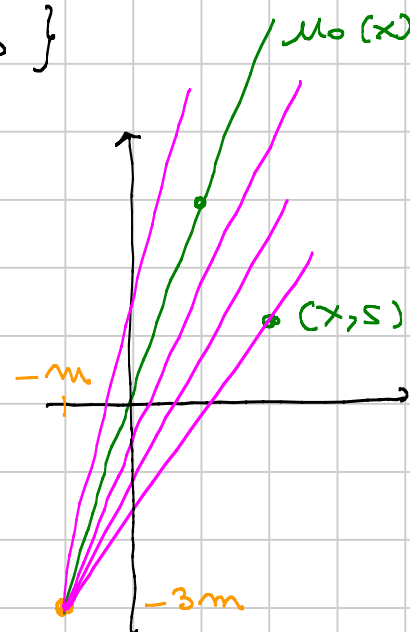
Considero diverse DBC

$$u(-m) = -3m \quad u(x) = S$$

Congetturo che il minimo sia dato dalla retta congiungente, e quindi

$$V(x, S) = \int_{-m}^x (\text{coeff. ang. retta})^2 dt = \frac{(S+3m)^2}{x+m}$$

" $\frac{(S+3m)^2}{(x+m)^2}$



Usando questa come $V(x, S)$ trovo $A(x, S)$ e $B(x, S)$, quindi $\hat{L}(x, S, p)$ e faccio le verifiche come alla lezione precedente.

Oss. Se invece di usare come estremo fisso $(-m, -3m)$ usavo direttamente $(0, 0)$ ottenevo la calibrazione del terzo modo.

Oss. Mandando $m \rightarrow +\infty$ ottengo il 1° modo che corrisponde alla famiglia di rette //

$$u(x) = 3x + c$$

— 0 — 0 —

Eccesso di WEIERSTRASS Data una Lagrangiana $L(x, s, p)$ si definisce eccesso di W. la funzione di 4 variabili

$$E(x, s, p, q) := L(x, s, q) - L(x, s, p) - (q-p)L_p(x, s, p)$$

(è una specie di diff. tra L ed il suo sviluppo del 1° ordine nella variabile p).

Oss. Talvolta l'eccesso si scrive come

$$E(x, s, p, q) = L(x, s, p+q) - L(x, s, p) - q L_p(x, s, p)$$

(è la stessa cosa con $p+q$ al posto di q).

Condizioni di Weierstrass Sia $u_0(x)$ un candidato per qualcosa.

$$(W) \quad \underbrace{E(x, u_0(x), \dot{u}_0(x), q)}_{\text{dipende da 2 variabili}} \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall q \in \mathbb{R}$$

(W⁺) Esiste $\delta > 0$ t.c.

$$\underbrace{E(x, s, p, q)}_{\text{dipende da 4 variabili}} \geq 0$$

$$\begin{aligned} &\forall x \in [a, b], \quad \forall q \in \mathbb{R} \\ &\forall (s, p) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c.} \\ &\quad |s - u_0(x)| \leq \delta \\ &\quad |p - \dot{u}_0(x)| \leq \delta \end{aligned}$$

Condizioni di Weierstrass

già lo sapevamo perché
 $SLM \Rightarrow DLM$

• Necessaria : $u_0(x)$ è SLM $\Rightarrow (E) + (L) + [(L^+) \Rightarrow (J)] + (W)$

• Sufficiente : $(E) + (L^+) + (J^+) + (W^+) \Rightarrow u_0(x)$ è SLM.

Road map per la cond. sufficiente:

$$(E) + (L^+) + (J^+) \Rightarrow (F) \Rightarrow (WRF) \Rightarrow \mu_0 \text{ è SLM.}$$

$\uparrow$ *embedding theorem* $\uparrow$ *se vale (W⁺)*

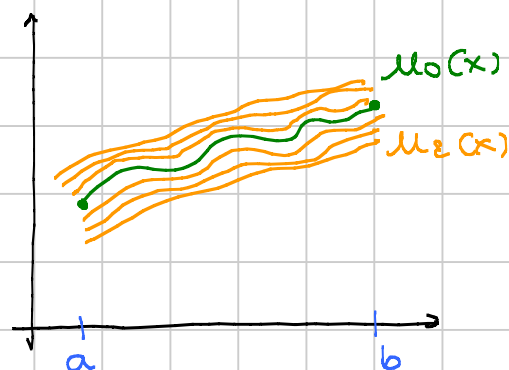
(WRF) Weierstrass representation formula

(F) Field: esistenza di un campo di Weierstrass.

Esiste $\varepsilon_0 > 0$ ed esiste una funzione

$$\mu: [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che



(i) $\mu(0, x) = \mu_0(x)$ per ogni $x \in [a, b]$

(ii) per ogni $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, la funzione $x \rightarrow \mu(\varepsilon, x)$ risolve (ELE)

(iii) per ogni $x \in [a, b]$, la funzione $\varepsilon \rightarrow \mu(\varepsilon, x)$ è strett. crescente.

Brutalmente: $\mu_0(x)$ è immersa in una famiglia di soluzioni di (ELE), ovviamente con DBC diverse.