

"Un idiota da solo in mezzo ad una folla non lo nota nessuno;
un gruppo intero di idioti invece si riconosce subito"

[citazione libera da Ennio De Giorgi]

CALIBRAZIONI

Esempio motivazionale Considero il problema

$$\min \left\{ \int_0^1 u^2(x) dx : u(0)=0, u(1)=3, u \in C^1([0,1]) \right\}$$

Il min. è dato dalla retta, ma faccio finta di non saperlo.
Come lo dimostro?

1° modo Considero la disug. $p^2 \geq 6p-9$. Segue che

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(x)^2 dx &\geq \int_0^1 (6u(x)-9) dx = 6 \int_0^1 u(x) dx - 9 \\ &= 6[u(x)]_0^1 - 9 = 18 - 9 = 9 = \int_0^1 u_0^2(x) dx \end{aligned}$$

dove $u_0(x) = 3x$.

Quindi la retta è p.to min. Inoltre vale il segno di = se e solo se vale per ogni x nella disug $u^2 \geq 6u-9$, il che vale sse $u(x) \equiv 3$.

2° modo Fisso $m > 0$ e considero la disug.

$$p^2 \geq 2 \frac{s+3m}{x+m} p - \left(\frac{s+3m}{x+m} \right)^2 \quad \begin{array}{l} \forall p \in \mathbb{R} \quad \forall s \in \mathbb{R} \\ \forall x > 0 \end{array}$$

La applico con $p = u(x)$ e $s = u(x)$:

$$\int_0^1 \dot{u}(x)^2 dx \geq \int_0^1 2 \frac{u(x)+3m}{x+m} \dot{u}(x) - \left(\frac{u(x)+3m}{x+m} \right)^2 dx$$

(miracolo!) $= \int_0^1 \left[\frac{(u(x)+3m)^2}{x+m} \right]' dx$

$$= \left[\frac{(u(x)+3m)^2}{x+m} \right]_0^1 = \frac{(3+3m)^2}{1+m} - \frac{(3m)^2}{m}$$

$$= 9(1+m) - 9m = 9 \quad \text{😊}$$

Se vado a vedere quando vale il segno di = trovo $\Leftrightarrow \dot{u}(x) \equiv 3$.

Oss. La disug. del 1° modo è il limite di quella del 2° per $m \rightarrow +\infty$.

3° modo Considero la disuguaglianza

$$p^2 \geq 2 \frac{s}{x} p - \left(\frac{s}{x} \right)^2 \quad \forall p \in \mathbb{R} \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad \forall x > 0$$

(è il limite per $m \rightarrow 0^+$ della precedente). Al solito modo

$$\int_0^1 \dot{u}(x)^2 dx \geq \int_0^1 2 \frac{u(x)}{x} \dot{u}(x) - \left(\frac{u(x)}{x} \right)^2 dx \quad (\text{è un integrale improprio})$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{u(x)^2}{x} \right)' dx$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \left(\frac{u(x)^2}{x} \right)' dx$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\frac{u(1)^2}{1} - \frac{u(a)^2}{a} \right] = 9 \quad \text{😊}$$

per l'Hôpital o perché essendo $u \in C^1$ il num. è almeno di ordine 2

— 0 — 0 —

NULL LAGRANGIAN Si tratta di Lagrangiane del tipo

$$\hat{L}(x, s, p) = A(x, s) p + B(x, s)$$

con la proprietà che A e B sono di classe C^1 e verificano

$$A_x(x, s) = B_s(x, s)$$

Per Analisi 2, sotto ipotesi di semplice connessione della zona di def., vale che esiste $V(x, s)$ t.c.

$$A(x, s) = V_s(x, s)$$

$$B(x, s) = V_x(x, s).$$

Teorema (Calibrazione via null Lagrangian)

Consideriamo un pbm. di min. per un funzionale integrale con DBC e Lagrangiana $L(x, s, p)$.

Sia $u_0: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ un candidato p.to di min.

Supponiamo che esista

$$\hat{L}(x, s, p) = A(x, s) p + B(x, s)$$

tale che

(i) $A_x(x, s) = B_s(x, s)$ (cioè $\hat{L}$ è null Lagrangian)

(ii) vale la disug.

$$L(x, s, p) \geq \hat{L}(x, s, p) \quad \forall (x, s, p) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2$$

(iii) vale l'uguaglianza

$$L(x, u_0(x), u'_0(x)) = \hat{L}(x, u_0(x), u'_0(x)) \quad \forall x \in [a, b].$$

Allora $u_0(x)$ è p.to di min.

Dim. Come negli esempi per ogni u ammissibile vale

$$\int_a^b L(x, u(x), \dot{u}(x)) dx \geq \int_a^b \hat{L}(x, u(x), \dot{u}(x)) dx$$

uso (ii) $\nearrow$

$$= \int_a^b A(x, u(x)) \dot{u}(x) + B(x, u(x)) dx$$

defn. $\hat{L}$ $\nearrow$

$$= \int_a^b [V(x, u(x))] ' dx$$

$\nearrow$

$$= [V(x, u(x))]_a^b$$

V è il potenziale

$$= [V(x, u_0(x))]_a^b$$

u e u_0 hanno stesse DBCs $\nearrow$

$$= \int_a^b \hat{L}(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) dx$$

defn. di $\hat{L}$ $\nearrow$

$$= \int_a^b L(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) dx$$

hp (iii) $\nearrow$

— o — o —

Oss. Questo non dimostra che $u_0(x)$ è l'unico p.to di min., ma in ogni caso ogni altro p.to di min. $v_0(x)$ deve verificare

$$L(x, v_0(x), \dot{v}_0(x)) = \hat{L}(x, v_0(x), \dot{v}_0(x)) \quad \forall x \in [a, b]$$

Anzi, i p.ti di min. sono tutte e sole le funzioni $v_0(x)$ che soddisfanno l'uguaglianza precedente

— o — o —

Ritorno al passato 1

$$L(x, s, p) := A(x) s^2 + 2B(x) sp + C(x) p^2$$

$$\hat{L}(x, s, p) := \left([z(x) s^2]_x \right) = \underbrace{\dot{z}(x) s^2}_{B(x)} + \underbrace{2z(x) sp}_{A(x)}$$

Verifico le 3 ipotesi

(i) $A_x = B_s$: $2\dot{z}(x)s = \dot{z}(x) \cdot 2s$ ☺

(ii) $L \geq \hat{L}$: vero se $z(x)$ è soluzione di (RDE)
(vedi 2 lez. precedenti)

(iii) vale = con $u_0(x) \equiv 0$: banale

Questo mostra che $u_0(x) \equiv 0$ è p.to di min. per il funzionale quadratico con Lagrangiana $L(x, s, p)$.

Ritorno al passato 2

Supponiamo $L(x, s, p)$ convessa nella coppia (s, p) e consid. la disug.

$$\begin{aligned} L(x, s, p) &\geq L(x, u_0(x), u'_0(x)) + (s - u_0(x)) L_s(x, u_0(x), u'_0(x)) \\ &\quad + (p - u'_0(x)) L_p(x, u_0(x), u'_0(x)) \\ &=: \hat{L}(x, u_0(x), u'_0(x)) \end{aligned}$$

Osservo che $\hat{L}$ è della forma voluta con

$$A(x, s) = L_p(x, u_0(x), u'_0(x))$$

$$B(x, s) = \text{ciò che rimane.}$$

(non dipende nemmeno da s !)

Verifico le ipotesi

(iii) uguaglianza quando metto $u_0(x)$
(ovvia! si semplifica quasi tutto)

(ii) disug. quando uetto $u(x)$ generica
(ovvia dalla disug. di convessità)

(i) $Ax = Bs$ vale se e solo se

$$\frac{d}{dx} L_p(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) = L_s(x, u_0(x), \dot{u}_0(x))$$

cioè se e solo se $u_0(x)$ verifica (ELE).
— o — o —

Torniamo all'esempio iniziale anche fatto nel 1° modo, cioè con

$$p^2 \geq 6p - 9$$

$$A(x, s) \equiv 6 \quad B(x, s) \equiv -9$$

$$V(x, s) = 6s - 9x$$

$$\int_0^1 \dot{u}(x)^2 dx \geq \int_0^1 (6\dot{u}(x) - 9) dx$$

$$= [V(x, u(x))]_0^1 = \text{diff. livelli in } a \text{ e } b.$$

Consideriamo le linee di livello di $V(x, s)$: $6s - 9x = \text{cost.}$

Una qualunque altra soluzione
con diverse DBC sulle stesse rette
ha comunque $F(u) \geq 9$
(la differenza degli stessi livelli).

Quindi in realtà la retta $u_0(x) = 3x$
non solo è minimo con DBC

$$u(0) = 0 \text{ e } u(1) = 3,$$

ma lo è con $u(a) = A$ e $u(b) = B$ con (a, A) e (b, B)

che appartengono alle rette. Quindi è minimo per un poun.
del tipo

curve-to-curve.

