

Condizioni necessarie / sufficienti per WLM

$$F(u) = \int_a^b L(x, u(x), \dot{u}(x)) dx \quad \text{con DBC}$$

Variazione seconda in  $u_0$  risp. alla direzione  $v$ :

$$\begin{aligned} \delta^2 F(u_0, v) = & \int_a^b \underbrace{L_{ss}(x, u_0(x), \dot{u}_0(x))}_{A_0(x)} v^2(x) + \\ & + 2 \underbrace{L_{sp}(x, u_0(x), \dot{u}_0(x))}_{B_0(x)} v(x) \dot{v}(x) + \\ & + \underbrace{L_{pp}(x, u_0(x), \dot{u}_0(x))}_{C_0(x)} \dot{v}(x)^2 \end{aligned}$$

Cond. necessarie

$$u_0 \text{ WLM} \Rightarrow u_0 \text{ DLM} \Rightarrow \delta^2 F(u_0, v) \geq 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(a, b)$$

$$\Rightarrow (L) + [(L^+) \Rightarrow (J)]$$

riguardiamo il segno di  $L_{pp}$ , cioè la convessità di  $L$  nella variabile  $p$ .

Cond. sufficienti

$$u_0 \text{ verifica } (E) + (L^+) + (J^+) \Rightarrow u_0 \text{ e WLM}$$

↑  
equazione  
di Eulero

↑  
sul funzionale quadratico  
con coeff.  $A_0(x), B_0(x), C_0(x)$ .

— o — o —

**Lemma 1** (Stima dall'alto per un funzionale quadratico)

$$|Q(v)| \leq M \int_a^b \dot{v}^2(x) dx \quad \forall v \in C_c^\infty(a,b)$$

$\uparrow$   
M dipende dalle norme infinito di  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $C(x)$  e diventa piccolo a piacere quando le norme diventano piccole.

**Dim**

$$Q(v) \leq \int_a^b |A(x)| v^2 + 2 \int_a^b |B(x)| \cdot |v(x)| \cdot |\dot{v}(x)| + \int_a^b |C(x)| \cdot \dot{v}^2$$

Ora

$$\int_a^b |C(x)| \dot{v}^2(x) \leq \left\{ \max_{x \in [a,b]} C(x) \right\} \int_a^b \dot{v}(x)^2 dx$$

D'altra parte  $v(x)$  è  $\frac{1}{2}$ -Hölder e

$$\begin{aligned} |v(x)| &= |v(x) - v(a)| \leq |x-a|^{1/2} \cdot \|\dot{v}\|_{L^2} \\ &\leq (b-a)^{1/2} \left( \int_a^b \dot{v}(x)^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_a^b |A(x)| \cdot v^2(x) dx &\leq \max_{x \in [a,b]} |A(x)| \cdot \int_a^b (b-a) \cdot \|\dot{v}\|_{L^2}^2 \\ &= \underbrace{\max_{x \in [a,b]} |A(x)| \cdot (b-a)^2 \left( \int_a^b \dot{v}(x)^2 dx \right)}_{\text{costante}} \end{aligned}$$

Per il termine centrale basta osservare che

$$2 |v(x)| \cdot |\dot{v}(x)| \leq |v(x)|^2 + |\dot{v}(x)|^2$$

e procedere come prima.

□

## Lemma 2 (Stima dal basso per un funzionale quadratico)

Sia  $Q(v)$  un funzionale quadratico che soddisfa  $(L^+)$  e  $(J^+)$ . Allora esiste  $\varepsilon_0 > 0$  tale che

$$Q(v) \geq \varepsilon_0 \int_a^b \dot{v}(x)^2 dx \quad \forall v \in C_c^\infty(a,b)$$

Dim Considero il nuovo funzionale quadratico

$$\begin{aligned} \hat{Q}_\varepsilon(v) &:= Q(v) - \varepsilon \int_a^b \dot{v}(x)^2 dx \\ &= \int_a^b A(x) v^2 + 2B(x) v \dot{v} + (C(x) - \varepsilon) \dot{v}^2 \end{aligned}$$

Se  $\varepsilon$  è abbastanza piccolo, allora  $\hat{Q}_\varepsilon$  verifica ancora le cond. suff. per essere  $\geq 0$ .

$(L^+)$  è gratis perché  $C(x) \geq m_0 > 0$  in  $[a,b]$ . (basta  $\varepsilon < m_0$ )

Devo controllare solo  $(J^+)$  per  $\hat{Q}_\varepsilon(x)$ . Ora  $(JDE)$  per  $\hat{Q}_\varepsilon$  sarà del tipo

$$\ddot{w} = \alpha_\varepsilon(x) \dot{w} + \beta_\varepsilon(x) w \quad (JDE_\varepsilon)$$

per opportuni coeff.  $\alpha_\varepsilon$  e  $\beta_\varepsilon$  che tendono a quelli della forma  $Q$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

Quindi le soluzioni  $w_\varepsilon(x)$  di  $(JDE_\varepsilon)$ , per dipendenza continua dei coeff., con dati iniziali

$$w_\varepsilon(a) = 0 \quad \dot{w}_\varepsilon(a) = 1$$

tendono alla corrisp. soluzione di  $(JDE)$  per  $Q(v)$  originario, nel senso che

$$w_\varepsilon \rightarrow w \quad \text{e} \quad \dot{w}_\varepsilon \rightarrow \dot{w} \quad \text{unif in } [a,b]$$

Sappiamo che  $w(x) > 0$  per ogni  $x \in (a, b]$  e vogliamo dedurre lo stesso per  $w_\varepsilon(x)$  quando  $\varepsilon$  è piccolo.

Questo si fa come alla lezione prec. introducendo il p.t.o c.

— o — o —

Lemma 3 Sia  $Q_0(v)$  un funzionale quadratico con coeff.  $A_0(x), B_0(x), C_0(x)$  che verificano  $(L^+)$  e  $(J^+)$ .

Sia  $Q(v)$  un funzionale quadratico con coeff.  $A(x), B(x), C(x)$ .  
Se

$$\|A(x) - A_0(x)\|_{C^0} \quad \|B(x) - B_0(x)\|_{C^0} \quad \|C(x) - C_0(x)\|_{C^0}$$

sono abbastanza piccole, allora  $Q(v) \geq 0$  per ogni  $v \in C_c^\infty$ .

Dim.  $Q(v) = Q_0(v) + \underbrace{[Q(v) - Q_0(v)]}_{\hat{Q}(v)}$

Per il lemma 2 sappiamo che esiste  $\varepsilon_0 > 0$  t.c.

$$Q_0(v) \geq \varepsilon_0 \int_a^b \dot{v}(x)^2 dx$$

Per il lemma 1 sappiamo che esiste  $M \in \mathbb{R}$  t.c.

$$|\hat{Q}(v)| \leq M \int_a^b \dot{v}(x)^2 dx$$

↑  
diventa piccolo a piacere quando i  
coeff. diventa piccoli in norma  $C^0$ .

Quindi  $Q(v) \geq \varepsilon_0 \int_a^b \dot{v}(x)^2 dx - M \int_a^b \dot{v}(x)^2 dx$

↑  
posso fare in modo  
che sia  $\leq \varepsilon_0$ .

— o — o —

Dim. cond. suff. per WLM Sia  $u_0$  che verifica  $(E) + (L^+) + (J^+)$ .  
 Sia  $w$  un altro competitore. Poniamo  $v := w - u_0$  e  
 osserviamo che  $v$  è nulla al bordo.  
 Consideriamo come sempre

$$\varphi(t) := F(u_0 + tv)$$

Allora

Taylor-Lagrange

$$\begin{aligned} F(w) &= \varphi(1) \stackrel{\downarrow}{=} \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot 1 + \frac{1}{2} \varphi''(t_0) \cdot 1^2 \\ &\quad \quad \quad \underset{F(u_0)}{\parallel} \quad \quad \underset{0(ELE)}{\parallel} \\ &= F(u_0) + \frac{1}{2} \varphi''(t_0) \\ &\quad \quad \quad \uparrow \text{misterioso in (91)} \end{aligned}$$

Mi basta dim. che  $\varphi''(t_0) > 0$ . Ora

$$\begin{aligned} \varphi''(t_0) &= \int_a^b L_{ss}(x, u_0(x) + t_0 v(x), \dot{u}_0(x) + t_0 \dot{v}(x)) v^2(x) \\ &\quad + 2L_{sp}(\dots) v(x) \dot{v}(x) + L_{pp}(\dots) \dot{v}(x)^2 \\ &= \int_a^b A_{t_0}(x) v^2 + 2B_{t_0}(x) v \dot{v} + C_{t_0}(x) \dot{v}^2 \end{aligned}$$

Se  $v(x)$  è abbastanza piccola in norma  $C^1$ , allora i  
 termini  $u_0 + t_0 v$  e  $\dot{u}_0 + t_0 \dot{v}$  sono abbastanza vicini ai  
 termini  $u_0$  e  $\dot{u}_0$ , Quindi i coeff.

$A_{t_0}(x), B_{t_0}(x), C_{t_0}(x)$  sono vicini ai coeff.  $A_0(x), B_0(x), C_0(x)$

in norma  $C^0$  (sto supponendo  $L_{ss}, L_{sp}, L_{pp}$  almeno continue).

Grazie al Lemma 3 concludiamo che  $\varphi''(t_0) \geq 0$  se  $v$  è  
 piccola in norma  $C^1$ . (c'è una  $C^1$  di  $u_0$  dove sta  $w$ ).

## L'ESEMPIO

$$Q(v) = \int_0^l \dot{v}^2 - v^2$$

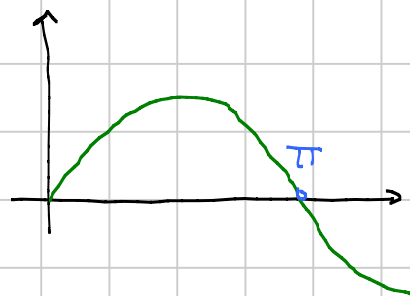
$(L^+)$  è gratis

(JDE) diventa

$$\ddot{w} = -w$$

$$w(0) = 0$$

$$\dot{w}(0) = 1$$



La soluzione è

$$w(x) = \sin x$$

Quindi abbiamo 3 casi

- Se  $l > \pi$ , allora abbiamo pto coniugato su  $(0, l)$   
 $\Rightarrow$  NO cond. uec.  $\Rightarrow Q$  non è  $\geq 0$  per ogni  $v$   
 $\Rightarrow \exists v_0$  nulla al bordo t.c.  $Q(v_0) < 0$  e  
usando m.v. ottengo che  $\inf = -\infty$
- Se  $l < \pi$ , allora abbiamo  $(J^+)$   $\Rightarrow$  cond. suff. Ok  $\Rightarrow$   
 $Q(v) \geq 0$  sempre.
- Resta il caso  $l = \pi$  (cond. uec. Ok, ma suff. NO)  
Dico che anche qui  $Q(v) \geq 0$  sempre.

Dim. Se così non fosse, troveremmo  $v_0$  nulla al bordo  
tale che  $Q(v_0) < 0$ .

Ma allora troveremmo  $v_0$  nulla al bordo t.c.

$$Q(v_0) < -2017$$

Ma allora con un riscaldamento  
affine otterremmo  $v_\varepsilon(x)$  t.c.

$$\int_0^{l-\varepsilon} \dot{v}_\varepsilon^2 - v_\varepsilon^2 < 0 \text{ e quindi}$$

avremmo negatività anche prima di  $l = \pi$ .

