

Funzionali quadratici

$$Q(v) = \int_a^b A(x) v^2 + 2B(x) v \dot{v} + C(x) \dot{v}^2$$

Condizioni necessarie

$$Q(v) \geq 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(a,b) \quad \Rightarrow \quad (L) + [(L^+) \Rightarrow (J^+)]$$

Cond. sufficienti

$$(L^+) + (J^+) \quad \Rightarrow \quad Q(v) \geq 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(a,b)$$

$$(L) \quad C(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

$$(L^+) \quad C(x) > 0 \quad "$$

$$(JDE) \quad (C\dot{w} + Bw)' = B\dot{w} + Aw$$

(J) Nessun p.t.o. coniugato di a in (a,b)

(J^+) " " " " " (a,b]

Schema della dim. della cond. suff.:

$$(L^+) + (J^+) \xRightarrow{(1)} (J^{++}) \xRightarrow{(2)} (R) \xRightarrow{(3)} Q(v) \geq 0 \quad \forall v \in \dots$$

(J^{++}) esiste sol. w di (JDE) t.c. w(x) > 0 per ogni x \in [a,b]

(R) esiste z: [a,b] \to \mathbb{R} di classe C^1 tale che

$$(RDE) \quad \dot{z} = \frac{[z+B]^2}{C} - A \quad \forall x \in [a,b]$$

## Implicazione ① DIM 1 (Uso il lemma di oscillazione)

Sotto le ipotesi  $(L^+)$  e  $(J^+)$  esiste una soluzione  $w_1$  di (JDE) t.c.

$$w_1(x) > 0 \quad \text{per ogni } x \in (a, b] \quad (\text{ma } w_1(a) = 0)$$

Interpretando a partire da  $b$ , esiste sol.  $w_2$  di (JDE) t.c.

$$w_2(x) > 0 \quad \text{per ogni } x \in [a, b) \quad (\text{ma } w_2(b) = 0)$$

Ora  $w(x) := w_1(x) + w_2(x)$  è la sol. richiesta

Oss. Abbiamo usato il lemma di oscill. per dire che esiste la  $w_2(x)$ .

Implicazione ② Osserviamo che non è ovvio che (RDE) abbia una sol. definita in tutto  $[a, b]$  (il RHS è quadratico in  $z$  e quindi tutte le sol. potrebbero blow up in un tempo più breve di lungo  $[a, b]$ ).

Sia  $w(x)$  come nella condizione  $(J^{++})$ . Poniamo

$$z(x) := - \frac{C\dot{w} + Bw}{w} \quad \leftarrow \text{sta nella derivata del LHS della (JDE)}$$

Mostriamo che risolve (RDE).

$$\text{LHS} = \dot{z}(x) = - \frac{(C\dot{w} + Bw)'}{w} + \frac{C\dot{w} + Bw}{w^2} \dot{w}$$

$$\text{(JDE)} \Rightarrow - \frac{B\dot{w} + Aw}{w} + \frac{C\dot{w} + Bw}{w^2} \dot{w}$$

$$= - \cancel{B \frac{\dot{w}}{w}} - A + C \frac{\dot{w}^2}{w^2} + \cancel{B \frac{\dot{w}}{w}}$$

$$\text{RHS: osserviamo che } z(x) = -C \frac{\dot{w}}{w} - B$$

$$\frac{1}{C} [z + B]^2 - A = \frac{1}{C} \left[ -C \frac{\dot{w}}{w} \right]^2 - A = C \frac{\dot{w}^2}{w^2} - A$$



## Condizione mega-sufficiente

Se per ogni  $x \in [a, b]$  valgono

$$A(x) \cdot C(x) \geq [B(x)]^2, \quad C(x) \geq 0,$$

allora  $Q(v) \geq 0$  per ogni  $v \in C^\infty([a, b])$ , anche senza supp. opt.

Dim. Se valgono quelle 2 ipotesi, allora

$$\underbrace{A(x) v^2 + 2B(x) v \dot{v} + C(x) \dot{v}^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{forma quadratica nelle} \\ \text{variabili } v \text{ e } \dot{v} \text{ con} \\ \text{matrice associata } \geq 0}} \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\begin{pmatrix} A(x) & B(x) \\ B(x) & C(x) \end{pmatrix}$$

— 0 — 0 —

Implicazione ③ Sia  $z(x)$  la soluzione di (RDE).

Considero la nuova forma

$$\begin{aligned} \hat{Q}(v) &:= \int_a^b \{ A(x) v^2 + 2B(x) v \dot{v} + C(x) \dot{v}^2 + [z(x) v^2]' \} dx \\ &= \int_a^b (A(x) + \dot{z}(x)) v^2 + 2(B(x) + z(x)) v \dot{v} + C(x) \dot{v}^2 \end{aligned}$$

Se impongo che questo nuovo funzionale quadratico verifichi la cond. mega suff., ottengo

$$\underbrace{(A(x) + \dot{z}(x)) C(x) \geq (B(x) + z(x))^2}$$

$$\underbrace{C(x) \geq 0}_{\text{gratis per } (L^+)}$$

Impongo il = e divido grazie alla  $(L^+)$  e così ottengo (RDE).

Quindi  $\hat{Q}(v) \geq 0$  per ogni  $v \in C^\infty([a, b])$ . Ora basta osservare che

$$\int_a^b [z(x) v^2]' dx = [z(x) v^2]_{x=a}^{x=b} = 0 \quad \text{se } v \in \underset{\substack{\uparrow \\ C_A}}{C^\infty}$$

Quindi per ogni  $v \in C_c^\infty(a,b)$  vale che

$$Q(v) = \hat{Q}(v) \geq 0.$$

Oss 1 R sta per RICCATI. Le equ. di Riccati sono eq. diff. del tipo

$$\ddot{z} = a(x)z^2 + b(x)z + c(x)$$

C'è un legame generale tra le equ. alla Riccati e le equ. lineari di ordine 2 del tipo

$$\ddot{w} = \alpha(x)\dot{w} + \beta(x)w$$

Il legame è dato dalla ricerca di sol. positive della seconda. le cerco del tipo

$$w(x) := e^{-v(x)}$$

Faccio i conti e viene

$$\begin{aligned}\dot{w} &= -\dot{v}e^{-v} \\ \ddot{w} &= -\ddot{v}e^{-v} + \dot{v}^2e^{-v}\end{aligned}$$

Sostituisco nella lineare e trovo

$$-\ddot{v}e^{-v} + \dot{v}^2e^{-v} = -\alpha(x)\dot{v}e^{-v} + \beta(x)e^{-v}$$

$$\ddot{v} = \dot{v}^2 + \alpha(x)\dot{v} + \beta(x) \quad \text{Ora } z(x) := \dot{v}(x) \text{ risolve una riccati}$$

$$\ddot{z} = z^2 + \alpha(x)z + \beta(x)$$

Come ottengo  $z$  a partire da  $w$ ?

$$w = e^{-v} \leadsto v = -\log w \leadsto z = \dot{v} = -\frac{\dot{w}}{w}$$

praticamente  
è la sostituz.  
di prima.

Implicazione ① DIM 1 (JDE) si può scrivere come

$$\ddot{w} = \alpha(x) \dot{w} + \beta(x) w \quad (\text{senza } (L^+))$$

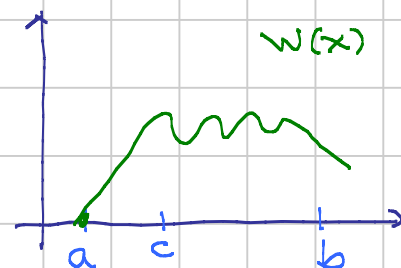
Per ipotesi sappiamo che la sol. di (JDE) con dati

$$w(a) = 0 \quad \dot{w}(a) = 1$$

non si annulla in  $(a, b]$ .

Provo a risolvere (JDE) con dati

$$w_\varepsilon(a) = \varepsilon \quad \dot{w}_\varepsilon(a) = 1$$



e spero che la soluz.  $w_\varepsilon$  sia  $> 0$  su  $[a, b]$  quando  $\varepsilon > 0$  è abbastanza piccolo.

- Per continuità di  $w$  e  $\dot{w}$  sappiamo che esiste  $c \in (a, b)$  t.c.

$$\dot{w}(x) \geq \frac{1}{2} \quad \forall x \in [a, c]$$

$$w(x) \geq m_0 > 0 \quad \forall x \in [c, b]$$

- Per dipendenza continua dai dati iniziali sappiamo che

$$\begin{array}{lcl} \underbrace{w_\varepsilon \rightarrow w} & \text{e} & \underbrace{\dot{w}_\varepsilon \rightarrow \dot{w}} \quad \text{unif. in } [a, b] \\ \downarrow & & \downarrow \\ w_\varepsilon(x) \geq \frac{m_0}{2} \quad \forall x \in [c, b] & & \dot{w}_\varepsilon(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, c] \\ \text{se } \varepsilon \text{ è piccolo} & & \text{se } \varepsilon \text{ è piccolo} \end{array}$$

Questo ci dice che per  $\varepsilon$  piccolo vale  $w_\varepsilon(x) > 0$  per ogni  $x \in [a, b]$  (su  $[c, b]$  è già scritto, su  $[a, c]$  segue dal fatto che  $w_\varepsilon(a) > 0$  e  $\dot{w}_\varepsilon(x) \geq 0$  dopo).

### Dim. Lemma oscillazione

Siano  $w_1$  e  $w_2$  due sol. lin. ind. di  $\ddot{w} = \alpha(x) \dot{w} + \beta(x) w$ .

Supponiamo che  $w_1$  si annulli in  $a$  e in  $b$ , con  $a < b$ .

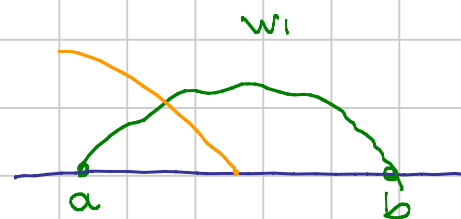
Allora  $w_2$  si annulla almeno una volta in  $(a, b)$ .

Posso supporre WLOG che  $a$  e  $b$

siano 2 annullamenti consecutivi

e che  $w_1(x) > 0$  in  $(a, b)$ .

Considero la matrice



$$\begin{pmatrix} w_1(x) & \dot{w}_1(x) \\ w_2(x) & \dot{w}_2(x) \end{pmatrix}$$

e chiamo  $W(x)$  il suo determinante. Con un facile conto si vede che

$$\dot{W}(x) = \alpha(x) W(x)$$

da cui

$$W(x) = W(a) \cdot \exp(\text{primitiva di } \alpha(x))$$

e quindi il segno di  $W(x)$  è costante.

Ora in  $x=a$

in  $x=b$

$$W(a) = - \underbrace{\dot{w}_1(a)}_{+} w_2(a)$$

$$W(b) = - \underbrace{\dot{w}_1(b)}_{-} w_2(b)$$

Ma allora  $w_2(a)$  e  $w_2(b)$  devono avere segno opposto.

— 0 — 0 —