

Funzionali quadratici Sono funzionali del tipo

$$Q(v) = \int_a^b A(x) v^2 + 2B(x) v \dot{v} + C(x) \dot{v}^2$$

Sui coeff. $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ si possono fare varie hp

- $L^\infty((a,b)) \rightarrow$ suff. per dare senso a $Q(v)$ per $v \in H^1$
- $C^0([a,b])$
- $C^1([a,b])$

Considereremo sempre funzioni v nulle al bordo.

Def. Un funzionale quadratico si dice NON NEGATIVO (semi-definito positivo) se

$$Q(v) \geq 0 \quad \forall v \in C_c^\infty((a,b))$$

Prop. Sono fatti equivalenti

- (i) $Q(v) \geq 0$ per ogni $v \in C_c^\infty((a,b))$
- (ii) $Q(v) \geq 0$ " " $v \in C^1([a,b])$ con $v(a) = v(b) = 0$
- (iii) $Q(v) \geq 0$ " " $v \in C^1$ a tratti " " "
- (iv) $Q(v) \geq 0$ " " $v \in H^1((a,b))$ con $\underline{v(a) = v(b) = 0}$
hanno senso in H^1

Dim. Soliti lemmi di approx.

— 0 — 0 —

Cond. nec. per essere non-NEG. : (L) e $[(L^+) \Rightarrow (J)]$

Cond. suff. " " " : $(L^+) + (J^+)$

— 0 — 0 —

CONDIZIONI DI LEGENDRE

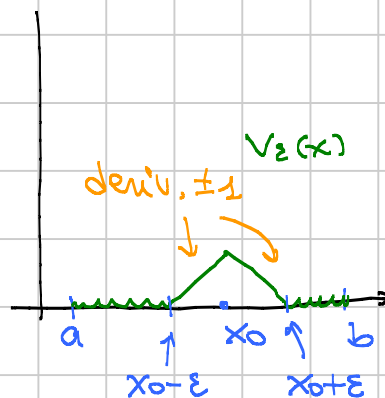
(L) $C(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$

(L⁺) $C(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$ (se $C(x)$ è continuo, questo implica che $C(x) \geq m > 0$)

Teorema Se i coeff. sono continui e $Q(v) \geq 0$ sempre, allora vale la condizione L.

Dim. Sia $x_0 \in (a, b)$ qualunque.

Per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo la funzione v_ε è nulla al bordo, quindi $Q(v_\varepsilon) \geq 0$.



$$Q(v_\varepsilon) = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} A(x) v_\varepsilon^2 + 2B(x) v_\varepsilon \dot{v}_\varepsilon + C(x) \cdot 1 \quad \uparrow \dot{v}_\varepsilon^2$$

$$+ \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} A(x) v_\varepsilon^2 + 2B(x) v_\varepsilon \dot{v}_\varepsilon + C(x) \cdot 1 \geq 0$$

Divido per ε e uso il teorema della media integrale

$$\frac{Q(v_\varepsilon)}{\varepsilon} = \overset{\uparrow 0}{A(x_\varepsilon)} v_\varepsilon(x_\varepsilon)^2 + 2 \overset{\uparrow 0}{B(x_\varepsilon)} v_\varepsilon(x_\varepsilon) \cdot 1 + C(x_\varepsilon) + \underset{\downarrow 0}{A(y_\varepsilon)} v_\varepsilon(y_\varepsilon)^2 + 2 \underset{\downarrow 0}{B(y_\varepsilon)} v_\varepsilon(y_\varepsilon) \cdot (-1) + C(y_\varepsilon)$$

per opportuni $x_\varepsilon \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ e $y_\varepsilon \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$.

Facciamo tendere $\varepsilon \rightarrow 0$ troviamo

$$2C(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{Q(v_\varepsilon)}{\varepsilon} \geq 0$$

Essendo x_0 arbitrario abbiamo finito $\square$

Oss. Abbiamo usato che $C(x)$ è continuo, ma solo la limitatezza di $A(x)$ e $B(x)$.

CONDIZIONI DI JACOBI Consideriamo l'eq. diff.

$$(C\dot{v} + Bv)' = Av + B\dot{v} \quad (\text{JDE})$$

Oss 1 Si tratta di (ELE) di $Q(v)$.

Oss 2 Se i coeff. sono di classe C^1 , posso fare il conto al LHS ottenendo

$$\dot{C}\dot{v} + C\ddot{v} + \dot{B}v + B\dot{v} = Av + B\dot{v}$$

Oss 3 Se inoltre vale (L^+) posso portare (JDE) in forma normale

$$\ddot{v} = -\frac{\dot{C}}{C}\dot{v} + \frac{A-B}{C}v$$

A questo p.to valgono tutti i teo. (esistenza, reg., unicità) di Analisi 2.

— o — o —

Def. Un p.to c si dice punto coniugato di a se la soluz. del pbm. di Cauchy l'estremo sx dell'cut.

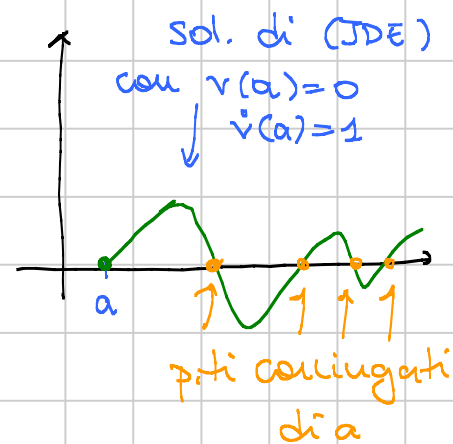
$$(\text{JDE}) \quad u(a) = 0 \quad u'(a) = 1$$

si annulla in c .

Oss. 4 La cond. $u'(a) = d \neq 0$ porterebbe alla stessa soluzione a meno di una costante, perché (JDE) è lineare. La def. di p.to coniugato usu dipende dalla scelta di 1.

(J) Non esistono pti coniugati di a nell'intervallo (a, b)

(J⁺) Non esistono pti coniugati di a nell'intervallo $(a, b]$



Oss 5 Allo stesso modo posso definire i pti coniugati di b risolvendo (JDE) con $v(b)=0$, $v'(b) \neq 0$

Prop. Sono fatti equivalenti (sotto l'ipotesi (L⁺))

(i) vale (J)

(ii) non esistono pti coniugati di b in (a, b)

(iii) l'unica sol. di (JDE) che si annulla almeno 2 volte in (a, b) è quella $\equiv 0$.

Dim. Facile conseguenza del Lemma di oscillazione che prima o poi enuncia.

— o — o —

Teorema Sia $Q(r)$ un funzionale quadratico non negativo. Supponiamo che

(i) i coeff. sono di classe C^1

(ii) vale la condizione (L⁺)

Allora vale la condizione (J).

Dim. Supponiamo per assurdo che non valga (J).

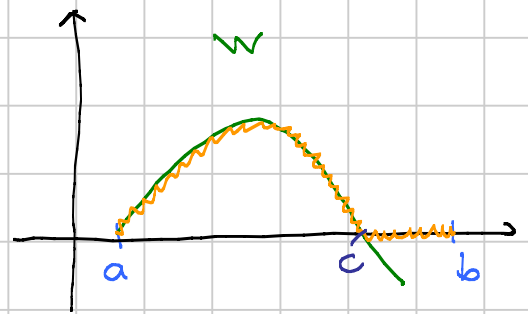
Allora (JDE) ha una soluzione w che si annulla

in a e in un altro pto $c \in (a, b)$ e non

è la soluzione identicamente nulla

Considero la funzione

$$v(x) := \begin{cases} w(x) & \text{se } x \in [a, c] \\ 0 & \text{se } x \in [c, b] \end{cases}$$



Dico che $Q(v) = 0$.

Se fosse vero, avremmo che v è un p.to di univ. per $Q(v)$, quindi v deve risolvere (ELE) di Q , che è (JDE). Sotto l'ipotesi (L^+) si ha che (JDE) è un'eq. lin. in forma normale

$$\ddot{v} = \alpha(x) \dot{v} + \beta(x) v$$

e per Analisi 2 le soluzioni di questa sono di classe C^2 .

Invece v non è nemmeno di classe C^4 . Per questo occorre osservare che $\ddot{w}(c) \neq 0$ (se così non fosse avremmo $w(c) = \ddot{w}(c) = 0$, ma allora per unicità sarebbe $w(x) \equiv 0$)

Resta da dimostrare che $Q(v) = 0$, cioè che

$$Q(v) = \int_a^c A v^2 + 2B v \dot{v} + C v^2 = \int_a^c A w^2 + 2B w \dot{w} + C \dot{w}^2$$

Partiamo da (JDE)

$$(C \dot{w} + B w)' = A w + B \dot{w}$$

Moltiplichiamo a dx e sx per w :

$$w (C \dot{w} + B w)' = A w^2 + B w \dot{w}$$

Integriamo su $[a, c]$ e otteniamo perché $w(a) = w(c) = 0$

$$\int_a^c A w^2 + B w \dot{w} = \int_a^c w (C \dot{w} + B w)' = \overbrace{\left[w (C \dot{w} + B w) \right]_a^c}^0 - \int_a^c C \dot{w}^2 + B w \dot{w}$$

Riorganizzando i termini segue la tesi.

— o — o —

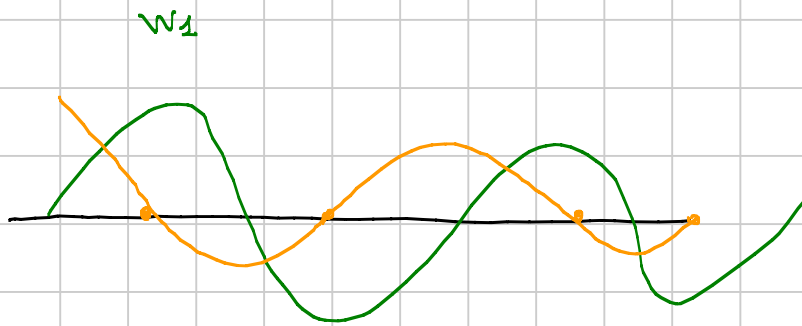
Lemma di oscillation Consideriamo un'eq. lin. del tipo

$$\ddot{w} = \alpha(x) \dot{w} + \beta(x) w.$$

Sia $w_1(x)$ una soluzione non $\equiv 0$

Sia $w_2(x)$ " " " " e non multipla della prec.

Allora tra ogni coppia di zeri di $w_1(x)$ esiste uno zero (e quindi anche uno solo) di w_2 .



Dal lemma segue la Prop. con i fatti equiv.

— o — o —