

VARIE TIPOLOGIE DI MINIMOSetting: funzionali integrali con DBC.

$$F(u) = \int_a^b L(x, u, u') dx$$

$$u \in \mathbb{X} := \{u \in C^1([a, b]) : u(a) = A, u(b) = B\}.$$

Def. Diciamo che $u_0 \in \mathbb{X}$ è

- p.to di min. globale (GM) se $F(u) \geq F(u_0)$ per ogni $u \in \mathbb{X}$
- p.to di min. loc. debole (WLM) se è un p.to di min. loc. rispetto alla metrica C^1 , cioè

 $\exists r > 0$ t.c. $F(u) \geq F(u_0)$ per ogni $u \in \mathbb{X}$ tale che

$$\|u - u_0\|_\infty + \|u' - u_0'\|_\infty \leq r$$

$$\uparrow$$

$$\sup \{|u(x) - u_0(x)| : x \in [a, b]\}$$

- p.to di min. loc. forte (SLM) se è come sopra risp. alla metrica C^0 , cioè

 $\exists r > 0$ t.c. $F(u) \geq F(u_0) \quad \forall u \in \mathbb{X} \text{ con } \|u - u_0\|_\infty \leq r.$

- p.to di min. direzionale (DML) se la funzione

$$\varphi(t) := F(u_0 + tv) \text{ ha min. loc. per } t=0 \text{ per ogni } v \in C^1 \text{ nulla al bordo.}$$

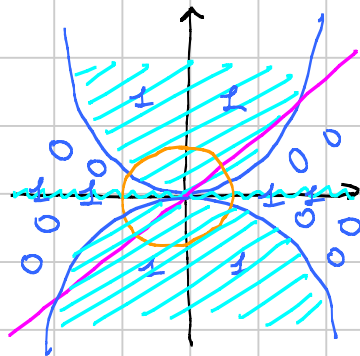
Oss. Valgono le implicazioni

$$GM \Rightarrow SLM \Rightarrow WLM \Rightarrow DLM$$

le implicazioni inverse sono tutte false.

SLM $\Rightarrow$ GM Falso già ad Analisi 1

DLM $\Rightarrow$ WLM Falsa già ad Analisi 2
 $f(x,y) = 1$ sull'asse x e dentro la parabola, o altrove.



$(x,y) = (0,0)$ è un pto di min. direzionale,
ma non è un pto di min. locale in nessun senso.

WLM $\Rightarrow$ SLM È falsa e l'esempio classico è il seguente

Esempio $F(u) := \int_0^1 u^3 dx$ $u(0) = 0, u(1) = 1.$

Dico che $u_0(x) \equiv x$ è WLM ma non SLM.

Dim. che u_0 è WLM Considero

$$Y := \{u \in C^1([0,1]) : u(x) \geq 0 \text{ e } u \in X\}$$

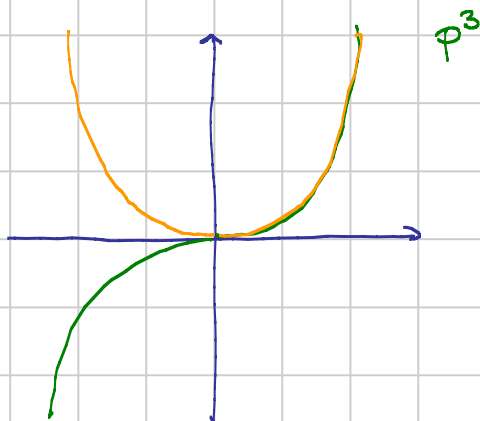
Questo è un intorno C^1 di $u_0(x)$, contiene quello della definizione con $r=1$.

Considero la Lagrangiana data

$$L(p) := p^3$$

e quella modificata

$$\hat{L}(p) := |p|^3$$



Per ogni $u \in \mathcal{Y}$ vale

$$L = \hat{L} \text{ per } p \geq 0$$

$$F(u_0) = \int_0^1 L(u_0) dx = \int_0^1 \hat{L}(u_0) \leq \int_0^1 \hat{L}(u) = F(u)$$

$$\uparrow$$

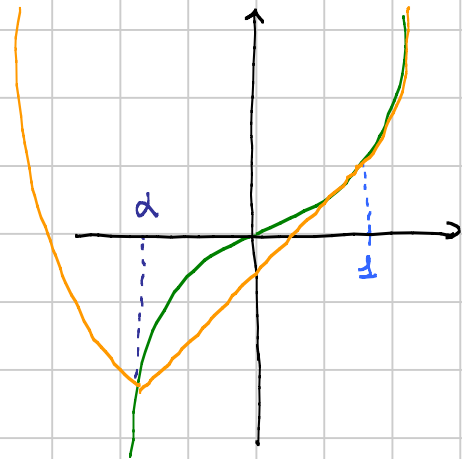
 $L(1) = \hat{L}(1)$

$\hat{L}$ è convessa,
quindi la retta
è l'unico p.to di
min.

Oss. Potrei anche considerare come $\mathcal{Y}$ un intervallo più grande!

Tiro la tangente in 1 e vedo
dove incontra la cubica.

Modifico L come in figura
e osservo che per $u(x) \geq \alpha$
vale il conto di sopra

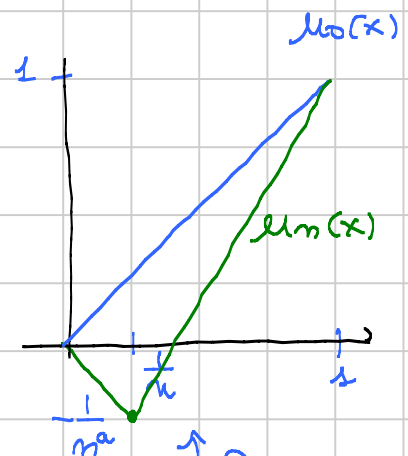


$$F(u_0) = \int_0^1 L(u_0) = \int_0^1 \hat{L}(u_0) \leq \int_0^1 \hat{L}(u) \leq \int_0^1 L(u) = F(u)$$

$\uparrow$
 $\hat{L}$ è convessa

Dim che u_0 NON è SLM

Prendo la funzione $u_n(x)$ affine
a tratti t.c. $u_n(0) = 0$, $u_n(1) = 1$ e
 $u_n(1/n) = -1/n^a$ per un opportuno a ,



$$F(u_n) = - \int_0^{1/n} \left(\frac{1}{n^{a-1}} \right)^3 + \int_{1/n}^1 \left(\frac{1 + \frac{1}{n^a}}{1 - \frac{1}{n}} \right)^3$$

$\uparrow$
 $u_n(x)$

$\downarrow$
1

$$- \frac{1}{n} \frac{1}{n^{3a-3}} = - \frac{1}{n^{3a-2}}$$

$\uparrow$ Osservo che
 u_n è vicina ad
 u_0 in norma C^0
se $a > 0$.

$\uparrow$ ma non
 C^1

Se $3a - 2 < 0$, cioè $a < \frac{2}{3}$
abbiamo che
 $F(u_n) \rightarrow -\infty$

VARIAZIONE SECONDA

Stesso setting di prima. Costruiamo

$$\psi(t) := F(u_0 + tv)$$

A suo tempo abbiamo definito

$$\delta F(u_0, v) := \psi'(0)$$

Ora definiamo

$$\delta^2 F(u_0, v) := \psi''(0)$$

Prop. Se u_0 è DLM, allora

$$\delta^2 F(u_0, v) \geq 0 \quad \forall v \in C^1 \text{ nulla al bordo}$$

↑
perché esista

Dim. Analisi 1.

Come calcolo la variazione seconda

$$\psi'(t) = \int_a^b L_s(x, u_0 + tv, \dot{u}_0 + t\dot{v}) v + L_p(x, u_0 + tv, \dot{u}_0 + t\dot{v}) \dot{v}$$

$$\psi''(t) = \int_a^b L_{ss}(x, u_0 + tv, \dot{u}_0 + t\dot{v}) v^2 + 2L_{sp}(\dots) v\dot{v} + L_{pp} \dot{v}^2$$

Quando poniamo $t=0$ troviamo

$$\delta^2 F(u_0, v) = \int_a^b L_{ss}(x, u_0, \dot{u}_0) v^2 + 2L_{sp}(\dots) v\dot{v} + L_{pp}(\dots) \dot{v}^2$$

↑ vale se L è C^2 rispetto alle variabili (s, p)

Dal passato

$$\delta F(u_0, v) = \int_a^b L_s(x, u_0, \dot{u}_0) v + L_p(x, u_0, \dot{u}_0) \dot{v}$$

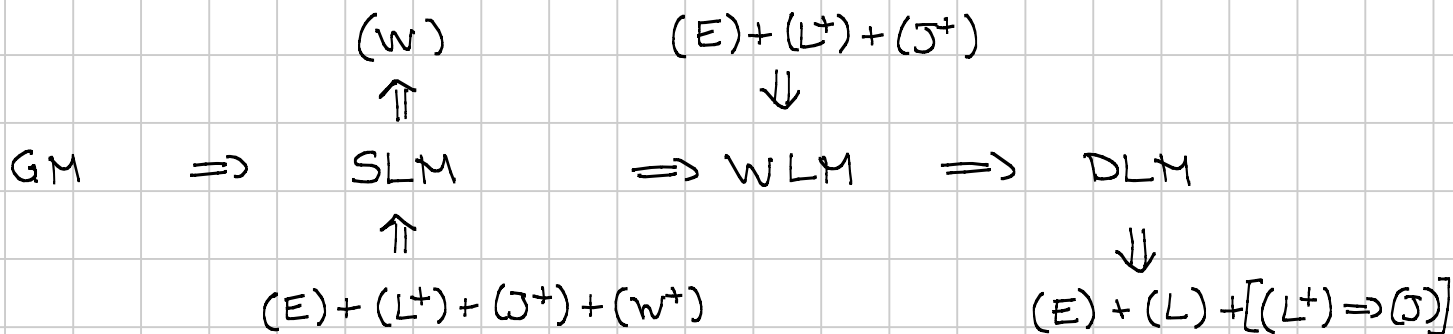
Fissato u_0

- $v \rightarrow \delta F(u_0, v)$ è lineare
- $v \rightarrow \delta^2 F(u_0, v)$ è quadratica.

↑ analoga alla forma quadratica
associata alla matrice Hessiana

— 0 — 0 —

Indice delle puntate successive



(E) : u_0 soddisfa (ELE)

— 0 — 0 —