

Teorema (convergenza dei min. e pti di min)

Sia $f_n: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una succ. di funzioni.

Sia $f_\infty: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ il Γ -liminf.

Supponiamo che $\{f_n\}$ sia equicoeriva con compatto K .

Allora valgono i seguenti 3 fatti

(1) f_∞ ammette minimo su X

(2) vale

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in X} f_n(x) \right) = \min_{x \in X} f_\infty(x)$$

(3) se $\{x_n\} \subseteq X$ è una succ. di quasi-minimi, cioè

↑
Anche (3)
richiede
che f_∞ è
 Γ -limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f_n(x_n) - \inf_{x \in X} f_n(x) \right) = 0$$

e una sua s.succ. conv., diciamo $x_{k_n} \rightarrow x_\infty$, allora

$$x_\infty \in \argmin \{ f_\infty(x) : x \in X \}$$



(4) Se f_∞ è pure Γ -limite, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in X} f_n(x) \right) = \min_{x \in X} f_\infty(x)$$

Dim. (1) Poiché K è cpt., per W f_∞ ammette minimo su K .
Dico che è minimo globale. Prendo $y \in X$ qualunque.
Per una prop. prec. sappiamo che esiste $y_n \rightarrow y$ t.c.

$$f_\infty(y) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(y_n).$$

Allora

$$\begin{aligned}
 f_\infty(y) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(y_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in X} f_n(x) \right) \\
 &\quad \uparrow \text{ recovery} \\
 &\quad \text{equicoerivit\`a} \nearrow = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in K} f_n(x) \right) \\
 &\quad \nearrow \geq \inf_{x \in K} f_\infty(x) \\
 &\quad \text{prop. prec.} \nearrow = \min_{x \in K} f_\infty(x).
 \end{aligned}$$

(2) Usando le prop. precedenti abbiamo che

$$\begin{aligned}
 \inf_{x \in X} f_\infty(x) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in X} f_n(x) \right) \\
 &\quad \uparrow X \text{ \u00e8 aperto} \\
 &\quad \text{equicoerivit\`a} \nearrow = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in K} f_n(x) \right) \\
 &\quad \nearrow \geq \inf_{x \in K} f_\infty(x) \\
 &\quad K \text{ \u00e8 cpt.} \nearrow \\
 &\quad \text{p.to (1)} \nearrow = \min_{x \in K} f_\infty(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad f_\infty(x_\infty) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(x_{k_n}) \\
 &\quad \uparrow x_{k_n} \rightarrow x_\infty \\
 &\quad \text{e Lemma 2}
 \end{aligned}$$

$$= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\underbrace{(f_{k_n}(x_{k_n}) - \inf_{x \in X} f_{k_n}(x))}_{\downarrow \text{ per hp}} + \inf_{x \in X} f_{k_n}(x) \right]$$

$$= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in X} f_{k_n}(x) \right)$$

$$\begin{aligned}
 &\stackrel{(?)}{=} \inf_{x \in X} f_\infty(x) \\
 &\quad \uparrow
 \end{aligned}$$

OK se vale il p.to (4)

(4) Supponiamo che f_∞ sia anche Γ -limite.
Devo solo mostrare che

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in X} f_n(x) \right) \leq \inf_{x \in X} f_\infty(x)$$

Sia x_∞ un pto di min. per $f_\infty(x)$. Sia $x_n \rightarrow x_\infty$
una sua recovery, cioè
$$f_n(x_n) \rightarrow f_\infty(x_\infty)$$

Ma allora

$$\inf_{x \in X} f_n(x) \leq f_n(x_n)$$

Prendendo $\limsup$ a dx e sx ho concluso.

Occhio (1) e (2) valgono con $f_\infty(x) = \Gamma\text{-liminf}$
(3) e (4) richiedono $f_\infty(x) = \Gamma\text{-lim}$.

Questo completa la teoria con il Γ -liminf.
La teoria con il Γ -limsup (inf = min nella def. e sci)
si basa su un lemma diverso.

Lemma Sia $f_\infty^+(x)$ il Γ -limsup.
Allora

$$\forall x \in X \quad \forall r > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists i \in \mathbb{N} \quad \forall j \geq i \quad \exists y \in B_r(x) \text{ t.c.}$$

$$f_j(y) \leq f_\infty^+(x) + \varepsilon$$

È come dire che

$$\forall x \in X \quad \forall r > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \text{vale} \quad \sup_{y \in B_r(x)} f_j(y) \leq f_\infty^+(x) + \varepsilon$$

DEFINITIVAMENTE

Prop. L'inf. nella def. di T -Lim sup è un min.

Dim. Costruisco induttivamente una succ. k_m come segue.
Per ogni $m \in \mathbb{N}$ applico il lemma con

$$x := x \quad r := \frac{1}{m} \quad \varepsilon := \frac{1}{m}$$

Trovo un i (che chiamo k_m e posso supporre $> k_{m-1}$)
tale che

$$\forall j \geq k_m \quad \exists y_{m,j} \in B_{\frac{1}{m}}(x) : f_j(y_{m,j}) \leq f_{\infty}^+(x) + \frac{1}{m}$$



In questo modo abbiamo definito x_n e i_n tali che

$$d(x, x_n) \leq \frac{1}{i_n} \quad f_{i_n}(x_n) \leq f_{\infty}^+(x) + \frac{1}{i_n}$$

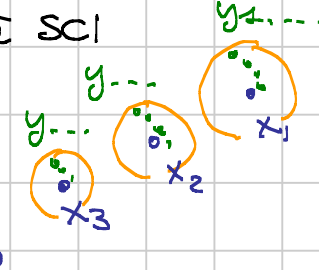
Queste bastano per concludere che $x_n \rightarrow x$ e

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_{i_n}(x_n) \leq f_{\infty}^+(x)$$

come richiesto !!

Oss. Raggiungere $\limsup \leq$ qualcosa è molto più
difficile che realizzare $\liminf \leq$ qualcosa

Con la stessa idea si dimostra che f_{∞}^+ è sci



Inserite qui dim. uolt. di Lagrange via Γ -conv.
(vedi annate precedenti)

Esempio

$$M_n := \min \left\{ \int_0^1 [n u_i^2 + (u - \arctan x)^2] dx : u \in C^1([0, 1]) \right\}$$

Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$.

Poniamo $F_n(u) := \int_0^1 n u_i^2 + (u - \arctan x)^2$

e calcoliamo il Γ -limite, sperando magari nell'equicoercività

Per la stabilità rispetto alle perturb. continue basta calcolare il Γ -limite di

$$F_n(u) := n \int_0^1 u_i^2$$

Si intende Γ -limite in L^2 , con $F_n(u)$ esteso mettendolo $+\infty$ fuori di $C^1([0, 1])$.

Congetturiamo

$$F_{\infty}(u) := \begin{cases} 0 & \text{se } u \text{ è costante} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se fosse così, ed avessimo equicoercività, avremmo gratis

$$M_n \rightarrow \min \left\{ \int_0^1 (\lambda - \arctan x)^2 : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Per la T -conv. servono 2 verifiche

- (1) **LIMSUP** Per ogni $u \in L^2$ devo trovare una recovery
 $\rightarrow$ se u non è costante, non c'è nulla da dire.
 $\rightarrow$ se u è costante, basta prendere $u_n = u$.

- (2) **LIMINF** Presa $u_n \rightarrow u$ qualunque, devo verificare

$$F_\infty(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n)$$

$\rightarrow$ se u è costante, è gratis.

$\rightarrow$ altrimenti, suppongo $\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n) < +\infty$ (altrimenti è banale), quindi a meno di s.succ.

$$F_{n_k}(u_{n_k}) \leq M$$

cioè

$$\int_0^1 u_{n_k}^2 \leq \frac{M}{n_k}$$

e questo ci dice che le u_{n_k} sono hölder con costante che tende a 0.

Per Ascoli-Arzelà le u_{n_k} tendono ad una costante.
 Ma allora il limite u è costante.

La stessa stima ci dà l'equicoercività: il compatto comune è una palla di H^1 , cioè

$$\{u \in H^1 : \int_0^1 u^2 \leq 3\}.$$