

(X, d) metrico, $f_n: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ succ. di funzioni

$$\Gamma\text{-}\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) := \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) : x_n \rightarrow x \right\}$$

$$\Gamma\text{-}\limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) := \inf \left\{ \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) : x_n \rightarrow x \right\}$$

- Programma
- ① Gli inf nelle def. sono dei min.
 - ② $\Gamma\text{-}\liminf$ e $\Gamma\text{-}\limsup$ sono SC
 - ③ Convergenza di minimi e p.ti di min.

Indichiamo con $f_\infty(x)$ il $\Gamma\text{-}\liminf$

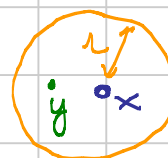
Lemma 1 $\forall x \in X \forall i \in \mathbb{N} \forall r > 0 \forall \varepsilon > 0 \exists j \in \mathbb{N} \exists y \in X \text{ t.c.}$

$$j > i$$

$$d(x, y) \leq r$$

$$f_j(y) \leq f_\infty(x) + \varepsilon$$

Altro modo di enunciazione: $\forall x \in X, \forall r > 0, \forall \varepsilon > 0$



$$\inf \{ f_j(y) : y \in B_r(x) \} \leq f_\infty(x) + \varepsilon \quad \text{frequent.}$$

Dim Prendo $\varepsilon > 0$. Per defn. di $f_\infty(x)$ trovo succ. $x_n \rightarrow x$ t.c.

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) \leq f_\infty(x) + \frac{1}{2} \varepsilon$$

Per le proprietà del $\liminf$ questo implica che

$$f_n(x_n) \leq f_\infty(x) + \varepsilon \quad \text{frequentemente} \quad (*)$$

Basta prendere $y := x_n$ con n abbastanza grande per cui vale (*).

Lemma 2 Sia $k_n \rightarrow \infty$ una succ. crescente di naturali
Sia $x_n \rightarrow x_\infty$.

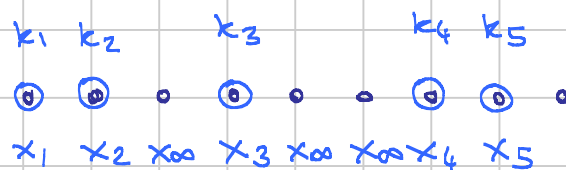
Allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(x_n) \geq f_\infty(x_\infty)$$

(è come dire che il Γ -liminf di una sottosucc. è $\geq$)

Dim. "Riempire i buchi nella successione"

Definisco una succ. z_n
ponendolo



$$z_i := \begin{cases} x_n & \text{se } i = k_n \text{ per qualche } n \\ x_\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4 \ z_5 \ z_6 \ z_7 \ z_8$

È ancora vero che $z_n \rightarrow x_\infty$ e quindi

$$f_\infty(x_\infty) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def.}}}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(z_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{s.succ.}}}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(z_{k_n}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(x_n).$$

Prop. L'inf. nella defn. di Γ -liminf è un minimo.

Dim. Dato $x \in \mathbb{X}$, devo trovare $x_n \rightarrow x$ t.c.

$$f_\infty(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n)$$

Definisco $k_1 := 1$, x_1 a caso. Suppongo di aver definito $k_1, \dots, k_{n-1}$, $x_1, \dots, x_{n-1}$ e applico il Lemma 1 con

$$x := x \quad i := k_{n-1} \quad r := \frac{1}{n} \quad \varepsilon := \frac{1}{n}$$

Trovo un indice j (che chiamo k_n) e un pto y (che chiamo x_n) t.c.

$$k_n > k_{n-1}$$

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n}$$

$$f_{k_n}(x_n) \leq f_{\infty}(x) + \frac{1}{n}$$

Costruisco una z_n tappando i buchi come prima e ottengo che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(z_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(z_{k_n})$$

$$= \liminf_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(x_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (f_{\infty}(x) + \frac{1}{n})$$

$$= f_{\infty}(x).$$

Questa era la disug. non banale

— o — o —

Teorema 1 $f_{\infty}(x)$ è sc.l.

Dim. Presa una qualunque $x_n \rightarrow x_{\infty}$, devo dim. che

$$f_{\infty}(x_{\infty}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_{\infty}(x_n)$$

Costruisco k_n ed y_n ponendo

$k_1 := 1$, y_1 a caso

Se ho definito $k_1, \dots, k_{n-1}$, $y_1, \dots, y_{n-1}$

uso il lemma 1 con

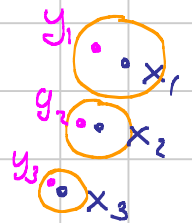
$$x := x_n \quad i := k_{n-1} \quad r := \frac{1}{n} \quad \varepsilon := \frac{1}{n}$$

Otengo un intero j (che diventa k_n) e y (che diventa y_n) t.c.

$$\underbrace{k_n > k_{n-1}}_{k_n \rightarrow \infty}$$

$$\underbrace{d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}}_{y_n \rightarrow x_{\infty}}$$

$$f_{k_n}(y_n) \leq f_{\infty}(x_n) + \frac{1}{n}$$



x_{∞}

Ora

$$f_{\infty}(x_{\infty}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(y_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (f_{\infty}(x_n) + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\geq 0})$$

Prop. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un aperto (quindi vale anche per $A = \mathbb{R}$)
Allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in A} f_n(x) \right) \leq \sup_{x \in A} f_\infty(x)$$

facili esempi
mostrano che
 $\leftarrow$ è possibile

Def. Poniamo $I_m := \sup_{x \in A} f_m(x)$

Prendo una successione $\{x_n\} \subseteq A$ t.c.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\infty}(x_n) = \sup_{x \in A} f_{\infty}(x) \quad (\text{succ. infizant})$$

Poiché $x_m \in A$ aperto, esiste $r_m > 0$ t.c. $B_{r_m}(x_m) \subseteq A$.
Ora costruisco k_n e y_n per induzione in questo modo:
 $k_1 := 1$ y_1 a caso in A .

Supponendo di aver definito $k_1, \dots, k_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1}$, applico il lemma 1 con

$$x := x_n \quad i := i_{n-1} \quad r := r_n \quad \varepsilon := \frac{1}{n}.$$

Ottengo un indice j (che chiamo k_{n+1}) e p.to y ($\leadsto y_n$) t.c.

$$k_n > k_{n-1}$$

$$\underbrace{d(y_n, x_n) \leq \frac{1}{n}}_{y_n \in A}$$

$$f_{k_n}(y_n) \leq f_\infty(x_n) + \frac{1}{n}$$

A questo punto

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in A} f_n(x) \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in A} f_{k_n}(x) \right)$$

$\uparrow$ s. succ.

$$\begin{aligned} & \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(y_n) \\ & \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(f_\infty(x_n) + \frac{1}{n} \right) \\ & = \inf_{x \in A} f_\infty(x). \end{aligned}$$

$\downarrow$ $\downarrow 0$

Prop. Sia $K \subseteq \mathbb{R}$ compatto.

Allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \in K} f_n(x) \right) \geq \inf_{x \in K} f_\infty(x)$$

facili esempi
mostrano che
> è possibile

Dim. Poniamo I_n come prima. Scegliamo $k_n \rightarrow \infty$ t.c.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{k_n}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ scegliamo un p.to di quasi minimo, cioè

$$f_n(x_n) \leq I_n + \frac{1}{n}.$$

Poiché K è opt., a meno di ulteriori s.succ., posso supporre
che $x_{k_n} \rightarrow x_\infty$.

Quindi abbiamo supposto

$$x_{k_n} \rightarrow x_\infty \quad \text{e} \quad I_{k_n} \rightarrow \liminf I_n$$

Ora abbiamo che

$$\begin{aligned} f_\infty(x_\infty) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(x_{k_n}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(I_{k_n} + \underbrace{\frac{1}{k_n}}_{0} \right) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{Lemma 2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} I_{k_n} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in K} f_n(x) \right) \end{aligned}$$

(Oss.: è fondamentale aver scelto k_n sin dall'inizio)
— o — o —

Def. (Equicoercività) Una successione $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice equicoerciva se

$$\exists K \subseteq X \text{ compatto t.c. } \inf_{x \in X} f_n(x) = \inf_{x \in K} f_n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\uparrow$
indipendente da n .