

GAMMA CONVERGENZA

Setting generale : (X, d) metrico

$f_n: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ succ. di funzioni

Def. Si dice che f_n gamma-converge ad una funzione $f_\infty: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ se valgono le seguenti proprietà.

(1) **LIMINF INEQUALITY** Per ogni succ. $x_n \rightarrow x_\infty$ in X vale

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \geq f_\infty(x_\infty)$$

(2) **LIMSUP INEQUALITY** Per ogni $x \in X$ esiste $x_n \rightarrow x$ t.c.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \leq f_\infty(x).$$

Oss. Nella limsup ineq. vale in realtà il limite

Dim Basta osservare che

$$f_\infty(x_\infty) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \leq f_\infty(x_\infty).$$

$\uparrow$ liminf ineq. $\uparrow$ ovvio $\uparrow$ limsup ineq.

Def. Le succ. $x_n \rightarrow x$ per cui vale la limsup ineq. si dicono RECOVERY SEQUENCE di x .

Esempio (solo in apparenza banale)

Supponiamo che $f_n(x) = f(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora $f_n \xrightarrow{\Gamma} \bar{f}$ (cioè il Gamma-lim. è il rilassato di f)

Dim. (È sostanzialmente la def. di rilassato)

Devo fare 2 verifiche

- liminf: per ogni $x_n \rightarrow x_\infty$ vale

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \geq \bar{f}(x_\infty)$$

$\parallel$
 $f(x_n)$

- limsup: per ogni $x \in X$ esiste $x_n \rightarrow x$ t.c.

$$\limsup f_n(x_n) \leq \bar{f}(x)$$

Anche qui basta prendere una recovery per il rilassato

— o — o —

Oss. La Gamma conv. non ha relazioni con la conv. puntuale o uniforme.

Prop. Supponiamo che

(i) $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. sui cpt. di X

(ii) f_∞ è scl.

Allora

$$f_n \xrightarrow{\Gamma} f_\infty.$$

Dim. Devo fare le solite 2 verifiche

- limsup: basta prendere $x_n := x$ e osservare che

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_\infty(x)$$

↑
basta la
puntuale

- liminf : devo prendere una qualunque $x_n \rightarrow x_\infty$.

Ossewo che

$$K := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_\infty\} \text{ è cpl. in } X$$

quindi

$$f_n \rightarrow f_\infty \text{ unif. in } K.$$

Prendo $\varepsilon > 0$ e sono sicuro che definitivamente vale

$$f_n(x) \geq f_\infty(x) - \varepsilon \quad \forall x \in K$$

da cui

disug. sopra

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_\infty(x_n) - \varepsilon$$

$$\geq f_\infty(x_\infty) - \varepsilon$$

↑
 $\neq \varepsilon < 1$

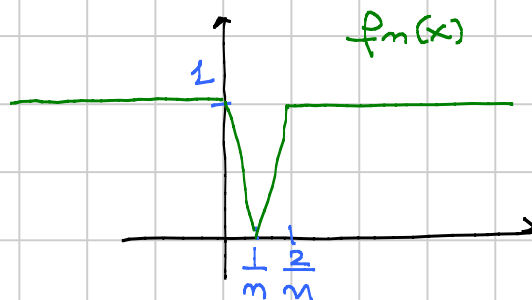
Poiché $\varepsilon > 0$ è arbitrario, ho la tesi.

Esempio 1 $X := \mathbb{R}$ $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ come in figura

Il limite puntuale è $\equiv 1$.

Il Gamma-limite è

$$f_\infty(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



Facciamo le 2 verifiche

- limsup : $\forall x \in \mathbb{R}$ devo trovare $x_n \rightarrow x$ t.c. $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \leq f_\infty(x)$

* se $x \neq 0$ uso $x_n \equiv x$ e sfrutto la puntuale

* se $x = 0$ uso $x_n := \frac{1}{n}$

• Liminf $\forall x_n \rightarrow x_\infty$ devo verificare che $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \geq f_\infty(x_\infty)$

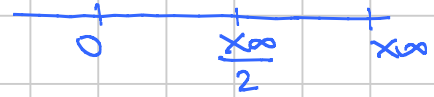
* se $x_\infty = 0$ è gratis

* se $x_\infty \neq 0$, allora supponiamo wlog $x_\infty > 0$, allora definitivamente $x_n \geq \frac{1}{2} x_\infty$ e quindi definitivamente

$$f_n(x_n) = 1$$

↑ appena

$$\frac{2}{n} \leq \frac{1}{2} x_\infty$$



Esempio 2 $f_n(x) := \arctan(nx)$.

Il limite puntuale è

$$g(x) := \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Il Gamma-Limite è

$$f_\infty(x) := \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Dim. La parte meno ovvia è la recovery per $x=0$.
Devo trovare $x_n \rightarrow 0$ t.c.

$$f(x_n) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \quad (\text{sarebbe } \limsup \leq)$$

$$\text{Basta prendere } x_n = -\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Il resto delle verifiche sono un facile esercizio

Prop. (Stabilità per perturbazioni continue)

Siano $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$

Sia $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA.

Allora

$$T\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(x) + g(x)] = \left[T\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] + g(x)$$

Dim Sia f_∞ il $T\text{-}\lim$ di f_n . Dico che $f_\infty + g$ è $T\text{-}\lim$ di $f_n + g$.

• liminf Per ogni $x_n \rightarrow x_\infty$ vale

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} (f_n(x_n) + g(x_n)) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \\ &\geq f_\infty(x_\infty) + g(x_\infty) \end{aligned}$$

• limsup. Per ogni $x \in X$ sia $x_n \rightarrow x$ recovery per f . Allora

$$\begin{aligned} \limsup (f_n(x_n) + g(x_n)) &\leq \limsup f_n(x_n) + \limsup g(x_n) \\ &\leq f_\infty(x) + g(x) \end{aligned}$$

Oss. ① Nel $\lim$. in $\liminf$ ho usato g sc1
" " " $\limsup$ " " " scs.

② Posso sostituire $g(x)$ fissa con una succ. di funzioni

$g_n \rightarrow g_\infty$ unif. sui cpt.
con g_∞ continua.

Def. Sia $f_n: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ come sempre.

Possiamo sempre definire

$$\Gamma\text{-}\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) := \inf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \liminf_{m \rightarrow \infty} f_m(x_m) : x_m \rightarrow x \right\}$$

$\uparrow$
L'inf. è al variare della succ. $x_m \rightarrow x$

$$\Gamma\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) := \sup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \limsup_{m \rightarrow \infty} f_m(x_m) : x_m \rightarrow x \right\}$$

Prop. È ovvio che esistono sempre e soddisfano

$$\Gamma\text{-}\liminf f_n(x) \leq \Gamma\text{-}\limsup f_n(x)$$

Inoltre coincidono se e solo se c'è il Γ -Limite.

Dim. Sostanzialmente è la def. di Γ -conv.

Supponiamo che $f_n \xrightarrow{\Gamma} f_\infty$. Allora la $\liminf$ ineq. dice che

$$f_\infty(x) \leq \Gamma\text{-}\liminf f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

D'altra parte la $\limsup$ ineq. dice che

$$\Gamma\text{-}\limsup f_n(x) \leq f_\infty(x)$$

Mettendole insieme si ottiene quella non banale.

L'altra implicazione è analoga.

— o — o —

Tutta la verità... quelli appena definiti sarebbero

$$\Gamma^- - \text{liminf} \quad \text{e} \quad \Gamma^- - \text{limsup}.$$

Analogamente ci sarebbero

$$\Gamma^+ - \text{liminf } f_n(x) := \sup \{ \text{liminf } f_n(x_n) : x_n \rightarrow x \}$$

$$\Gamma^+ - \text{limsup } f_n(x) := \sup \{ \text{limsup } f_n(x_n) : x_n \rightarrow x \}$$

che quando coincidono si definiscono Γ^+ -limite

Morale: "quelli con il + vanno bene per i pbm. di max"
" " " - " " " " " min".