

Def. (Sottoinsieme denso in energia)

Sia (X, d) metrico e sia $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$.

Un sottoinsieme $D \subseteq X$ si dice denso in energia per f se

$$\forall x \in X \quad \exists \{x_n\} \subseteq D \text{ t.c. } x_n \rightarrow x \text{ e } f(x_n) \rightarrow f(x)$$

Oss 1 Se f è continua, allora $D \subseteq X$ è denso in energia per f se e solo è denso e basta.

Oss 2 Si ha che D è denso in energia se e solo se

$\{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq X \times \bar{\mathbb{R}}$ è denso nel grafico rispetto alla topologia del prodotto.

Lemma Sia (X, d) metrico, sia $\varphi: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, sia $\psi: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, e sia $D \subseteq X$.

Supponiamo che

- (i) $\varphi(x) \leq \psi(x)$ per ogni $x \in D$,
- (ii) D è denso in energia per ψ ,
- (iii) φ è SCI.

Allora

$$\varphi(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in X.$$

Dim. Sia $x \in X$. Per la (ii) esiste $\{x_n\} \subseteq D$ t.c. $x_n \rightarrow x$ e $\psi(x_n) \rightarrow \psi(x)$.

Allora

$$\underbrace{\varphi(x)}_{(iii)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\varphi(x_n)}_{(i)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\psi(x_n)}_{(ii)} = \psi(x).$$

STRATEGIA 2 (Per calcolare un rilassato)

Data $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Se sospetto che $g: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ sia il rilassato di f , allora mi basta verificare che

(i) g è s.c.i.,

(ii) $g(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in X$,

(iii) esiste $D \subseteq X$ denso in energia per g tale che

$$\forall x \in D \exists x_n \rightarrow x \text{ t.c. } \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq g(x)$$

(basterebbe $\liminf$)

Dim. $g \leq \bar{f}$ Sia $x_n \rightarrow x$ una qualunque succ.
Allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \geq g(x)$$

(ii) (i)

Prendendo l'inf sulle succ. ottengo $\bar{f}(x) \geq g(x)$.

$\bar{f} \leq g$ Vorrei applicare il lemma con $\varphi := \bar{f}$, $\psi := g$.
Verifico le hp

(i) $\varphi(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in D$ Questa è la condizione (ii) d'ora

(ii) D è denso in energia per ψ (che è g)

(iii) φ è s.c.i., ma $\bar{f}$ è s.c.i.

— o — o —

In questa strategia l'esistenza della recovery va mostrata non per ogni $x \in X$, ma solo per ogni $x \in D$ che sia denso in energia per il presunto limite

— o — o —

ESTENSIONE PER RILASSAMENTO

È data $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Inoltre $X \subseteq \hat{X}$, dove $(\hat{X}, d)$ è uno spazio metrico.

Voglio trovare

$$\hat{f}: \hat{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

che in un certo senso estenda f .

Idea: penso f definita $+\infty$ fuori di X , cioè

$$\hat{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \\ +\infty & \text{se } x \in \hat{X} \setminus X \end{cases}$$

Pongo poi $\hat{\hat{f}}(x) := \hat{f}(x)$.

Esempio $\hat{X} := L^2(a, b)$, $X := C^1([a, b])$
 $C^{1,7}([a, b])$
 $C^\infty(a, b)$

$$F(u) := \int_a^b u^2 dx \quad \forall u \in X$$

Chi è l'estensione di F a tutto L^2 ?

Sarà

$$\hat{F}(u) := \begin{cases} \int_a^b u^2 dx & \text{se } u \in H^1(a, b) \\ +\infty & \text{se } u \in L^2 \setminus H^1 \end{cases}$$

Dim (usando la strategia 2) Chiamata $\hat{F}$ come G , dove fare 3 verifiche

(i) G è sc1 (visto tante volte)

(ii) $G(u) \leq F(u)$ in L^2 (ovvio quando $u \in C^1$, e ancora più ovvio quando $u \notin C^1$)

(iii) Devo trovare un sottoinsieme $D \subseteq L^2$ denso in energia per G tale che

$$\forall u \in D \exists u_n \rightarrow u \text{ con } \limsup_{n \rightarrow \infty} F(u_n) \leq G(u)$$

Questa proprietà è ovvia (con $u_n \equiv u$) se $D = C^1$.

Resta solo da verificare che D è denso in energia per G .

Questo richiede verificare che

$$\forall u \in L^2 \exists \{u_n\} \subseteq C^1 \text{ t.c. } u_n \rightarrow u \text{ e } G(u_n) \rightarrow G(u)$$

Questa è esattamente la def. (1) degli sparsi di Sobolev.

Oss. Volendo questo è un terzo modo di definire H^1 , cioè come il sottoinsieme di L^2 su cui il rilassato di F risulta finito.

Finestra sul futuro

Problema di Dido in $\mathbb{R}^2$

$$\min \{ \text{lunghezza}(\partial E) : E \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ e } \text{meas}(E) = 1 \}$$

$\uparrow$ Lebesgue

Domande: che vuol dire lunghezza?

Possibile approccio: pongo $\mathbb{X} :=$ insieme E che sono unione di poligoni

$\mathbb{X}$: sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^2$ con distanza data dalla misura della diff. simmetrica, $\text{lunghezza}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ è quella classica.

Per rilassamento posso estendere $\text{lunghezza}: \mathbb{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Esempio 2

$$\min \left\{ \int_a^b [\cos(u) + (u - \cos x)^2] dx \right\}$$

Risposta: il min non esiste e l'inf è $a-b$.

Sia $F(u)$ il funzionale che pensiamo ambientato in L^2 (vale $+\infty$ fuori da C^2 o C^{2*}).

Sappiamo che

$$\inf_{u \in L^2} F = \inf_{u \in L^2} \bar{F}$$

Per calcolare $\bar{F}$ basta calcolare il rilassato di

$$G(u) := \int_a^b \cos(u) dx$$

Infatti l'altro pezzo è continuo in L^2 e quindi per una nota proprietà "esce dal rilassato".

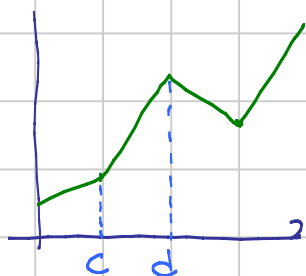
Dico che

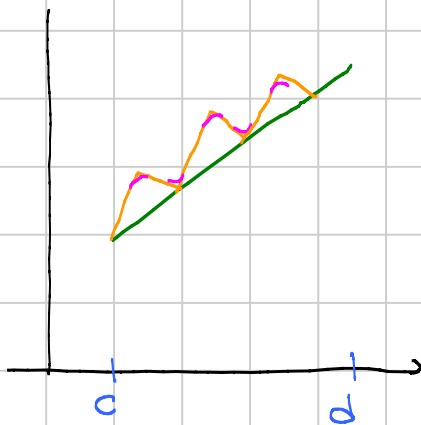
$$\bar{G}(u) := \int_a^b -1 dx = a-b \quad \forall u \in L^2,$$

Per dimostrarlo devo fare 3 verifiche

- (i) $\bar{G}$ è sci (è costante 😊)
- (ii) $\bar{G}(u) \leq G(u)$ (questo perché $\cos \geq -1$)
- (iii) esistenza di una recovery sequence. Andrebbe fatta $\forall u \in L^2$, ma basta per ogni u è denso in energia (essendo $\bar{G}$ costante, basta un qualunque D denso). Prendo come D le funzioni affini a tratti.

La verifica si riduce a farlo sulle rette





Basta approssimare la retta con
una spezzata vicina in norma L^2
e con coeff. angolari del tipo
 $(2k+1)\pi$

in modo che $\cos \varepsilon_m = -1$

Con dei piccoli raccordi possiamo
anche prendere le approx. C^1 .

— o — o —