

Rapporti tra $\sup / \inf$ di f e $\sup / \inf$ di $\bar{f}$

Setting: (X, d) , $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ e $\bar{f}: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ come sempre.

Proprietà 6 di $\bar{f}$

$$\sup_{x \in X} f(x) = \sup_{x \in X} \bar{f}(x)$$

Dim. $\supseteq$ Ovvio perché $f(x) \geq \bar{f}(x)$ per ogni $x \in X$.

$\leq$ Prendo una succ. x_n "iniziale", cioè t.c.

$$\bar{f}(x_n) \rightarrow \sup_{x \in X} \bar{f}(x)$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ applico il Lemma con $x = x_n$, $r = 2017$, $\varepsilon = \frac{1}{n}$.
Trovo $y_n \in X$ t.c.

$$d(x_n, y_n) \leq 2017$$

$$f(y_n) \leq \bar{f}(x_n) + \frac{1}{n}$$

Ora

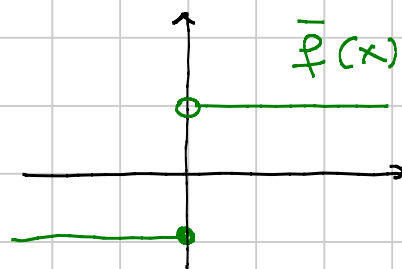
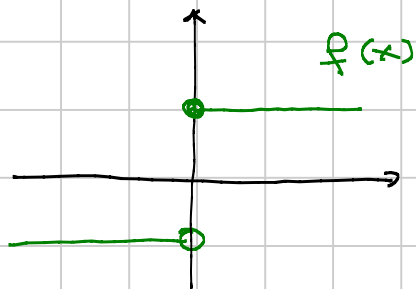
$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} \bar{f}(x) &= \lim_{\substack{\uparrow \\ \text{ovvia} \\ \sup \leq \bar{f}(x_n)}} \bar{f}(x_n) = \lim_{\substack{\uparrow \\ \text{lim} = \liminf}} \bar{f}(x_n) \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(f(y_n) - \frac{1}{n} \right) \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) \\ &\geq \sup_{x \in X} f(x). \end{aligned}$$

— 0 — 0 —

Oss. Per ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{X}$ vale la disug.

$$\sup_{x \in A} \bar{f}(x) \leq \sup_{x \in A} f(x) \quad (\text{perché } \bar{f} \leq f)$$

La disug. può essere stretta. Ad esempio $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, $A = [0, +\infty)$



$$\sup \{ f(x) : x \geq 0 \} = 1$$

$$\sup \{ \bar{f}(x) : x \geq 0 \} = 0$$

Proprietà $\neq$ di $\bar{f}$

$$\sup_{x \in A} \bar{f}(x) = \sup_{x \in A} f(x) \quad \forall A \subseteq \mathbb{X} \text{ aperto}$$

Dim. Basta fare $\geq$. Come sopra prendiamo una x_n sufficiente per il rilassato, cioè

$$\sup_{x \in A} \bar{f}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{f}(x_n).$$

Poiché A è aperto esiste $\{r_n\} \subseteq (0, +\infty)$ t.c. $B_{r_n}(x_n) \subseteq A$.

Uso il lemma con $x = x_n$, $r = r_n$, $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

Trovo y_n t.c.

$$d(x_n, y_n) \leq r_n$$

$$f(y_n) \leq \bar{f}(x_n) + \frac{1}{n}$$

$\downarrow$

$$y_n \in B_{r_n}(x_n) \subseteq A$$

e concludo come prima

$$\sup_{x \in A} \bar{f}(x) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \bar{f}(x_n) \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(f(y_n) - \frac{1}{n} \right)$$

$$= \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) \geq \sup_{x \in A} f(x)$$

— 0 — 0 —

Def. (Già data) Una funzione $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ si dice coerciva se

$$\exists K \subseteq X \text{ cpt. t.c. } \sup_{x \in X} f(x) = \inf_{x \in K} f(x).$$

Proprietà 8 di $\bar{f}$ Se f è coerciva, allora $\bar{f}$ ha min. su X e

$$\inf_{x \in X} f(x) = \min_{x \in X} \bar{f}(x)$$

Dim. Il rilassato ammette min in K (è sci!). Devo solo dimostrare che

$$\min \{ \bar{f}(x) : x \in K \}$$

è in realtà il min su tutto X .

Prendo un qualunque p.to $y \in X$. Per una delle proprietà precedenti esiste una recovery per y , cioè una succ. $y_n \rightarrow y$ t.c.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = \bar{f}(y).$$

Allora

$$\begin{aligned} \bar{f}(y) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) \geq \sup_{x \in X} f(x) \stackrel{f \text{ coerciva}}{=} \inf_{x \in K} f(x) \\ &\stackrel{\text{recovery}}{\uparrow} \stackrel{\text{def. sup}}{\uparrow} \stackrel{f \geq \bar{f}}{\uparrow} \geq \inf_{x \in K} \bar{f}(x) \\ &\stackrel{\bar{f} \text{ sci.}}{\uparrow} = \min_{x \in K} \bar{f}(x). \end{aligned}$$

Per concludere basta osservare che

$$\sup_{x \in X} f(x) = \sup_{x \in X} \bar{f}(x) = \min_{x \in X} \bar{f}(x),$$

□

Proprietà 9 di $\bar{f}$ Sia x_n una successione infinita per f .
 Supponiamo che $x_n \rightarrow x_\infty$, cioè che sia convergente.
 Allora x_∞ è un pto di cuiu. del rilassato.

Dim Per ipotesi $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \sup_{x \in X} f(x) = \inf_{x \in X} \bar{f}(x)$

D'altra parte x_n collabora alla definizione di $\bar{f}(x_\infty)$, quindi

$$\begin{aligned} \inf_{x \in X} \bar{f}(x) &\leq \bar{f}(x_\infty) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \\ &\quad \uparrow \text{def. di inf} \quad \uparrow x_n \rightarrow x_\infty \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \sup_{x \in X} \bar{f}(x). \end{aligned}$$

Questo dimostra che $x_\infty \in \argmin \bar{f}$.

Corollario Supponiamo che f ammetta almeno un sottolivello non vuoto e contenuto in un compatto.

Allora tutte le succ. infinita per f hanno almeno una s.succ. che tende ad un pto di cuiu di $\bar{f}$.

Dim. Ogni succ. infinita sta definita nel sottolivello, quindi nel compatto, quindi ammette s.succ. conv.

$$x_{n_k} \rightarrow x_\infty.$$

Per l'oss. prec. $x_\infty \in \argmin \bar{f}$

Oss. Qui ho usato sottolivello nel senso "aperto"

$$\emptyset \neq \{x \in X : f(x) < M\} \subseteq K$$

Corollario Se $\bar{f}$ ha un unico p.to di min., ed f ha il sottolivello come sopra, allora tutte le succ. infinitanti tendono (senza bisogno di s.succ.) all'unico p.to di min. di $\bar{f}$.
 Anzi, le succ. infinitanti di f sono tutte e sole le recovery del p.to di min. di $\bar{f}$.

Come dimostro che una certa g è il rilassato di f ?

STRATEGIA 1 Mostro 2 cose:

① (liminf inequality) Per ogni $x_n \rightarrow x$ vale

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \geq g(x)$$

② (limsup inequality) Per ogni $x \in X$ esiste $x_n \rightarrow x$ tale che

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \leq g(x) \quad (\text{basterebbe il liminf}).$$

Dcm. Dalla ① segue che $\bar{f}(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in X$

Dalla ② segue che su quella specifica $x_n \rightarrow x$ vale

$$\bar{f}(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \leq g(x)$$

Proposizione Se $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora

$$\overline{f + \varphi} = \bar{f} + \varphi$$

(in generale vale solo $\overline{f + \varphi} \geq \bar{f} + \bar{\varphi}$: esercizio)

Dim. Faccio vedere che $g(x) = \bar{f}(x) + \varphi(x)$ verifica (1) e (2)

(1) Per ogni $x_n \rightarrow x$ vale

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} (f(x_n) + \varphi(x_n)) &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \varphi(x_n) \\ &\stackrel{\text{proprietà liminf}}{\geq} \bar{f}(x) + \varphi(x) \end{aligned}$$

$\swarrow \varphi \text{ è continua}$

(2) Dato $x \in \mathbb{X}$, prendo una recovery x_n per x e dico che va bene anche per $f + \varphi$. Infatti

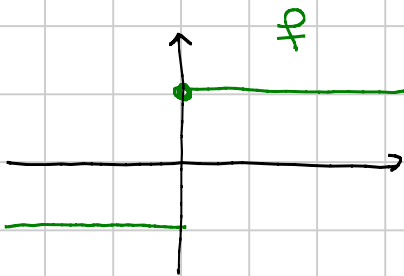
$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} (f(x_n) + g(x_n)) &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) + \limsup_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) \\ &\stackrel{\text{recovery}}{=} \bar{f}(x) + \varphi(x) \end{aligned}$$

$\swarrow \varphi \text{ è continua.}$

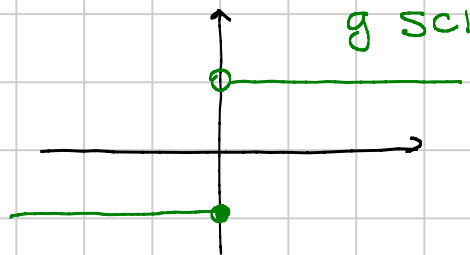
Oss. La proprietà precedente è detta stabilità rispetto alle perturbazioni continue.

Esercizio Quando vale $f(x) = \bar{f}(x)$?
Basta che $f(x)$ sia SCI.

Esempio Trovare f e g t.c. $\overline{f+g} > \bar{f} + \bar{g}$



$$\overline{f+g} \equiv 0$$



$$(\bar{f} + \bar{g})(0) = -2$$