

Prop. (caratterizzazione della SCI)

Sia (X, d) uno sp. metrico, e sia $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$.

Allora i seguenti fatti sono equivalenti

(1) Per ogni $x \in X$ vale

$$\liminf_{y \rightarrow x} f(y) \geq f(x)$$

(2) Per ogni succ. $x_n \rightarrow x_\infty$ vale

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x_\infty)$$

(3) Per ogni $M \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$\{x \in X : f(x) \leq M\}$$

è chiuso

(4) Si ha che l'epigrafico di f

$$\text{Epi}(f) := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\}$$

è chiuso in $X \times \mathbb{R}$.

— o — o —

In ciascuno di questi casi si dice che f è SCI in X .

Analoghe caratt. valgono per la semicont. sup. (esercizio).

— o — o —

Prop. (Sup di SCI è SCI) Sia (X, d) metrico e sia

$$f_i : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \quad \text{con } i \in I \leftarrow \text{insieme di indici}$$

una famiglia di funzioni SCI.

Allora

$$S(x) := \sup \{f_i(x) : i \in I\} \quad \text{è SCI.}$$

Dim 1 (Usando la def. per succ., vedi (2))

Sia $x_n \rightarrow x_\infty$ una qualunque succ.

Allora per ogni $i \in I$ vale

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} S(x_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_i(x_n) \geq f_i(x_\infty)$$

$\uparrow$ se $\sup$ $\uparrow$ f_i è SCI

Se faccio il sup in $i \in I$ ottengo la tesi.

Dim 2 $\{x \in X : S(x) \leq M\} = \bigcap_{i \in I} \{x \in X : f_i(x) \leq M\}$

$\uparrow$ fatto insiemeistico

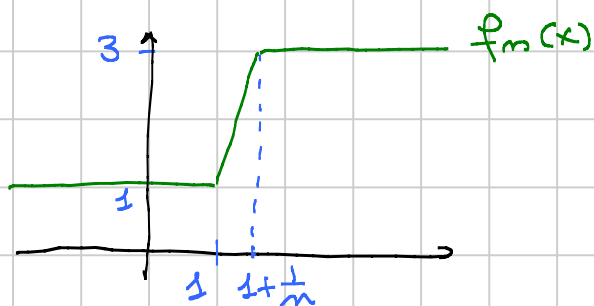
Intersezione qualunque di chiusi è chiusa

Dim 3 $\text{Epi}(S) = \bigcap_{i \in I} \text{Epi}(f_i)$

$\uparrow$ fatto insiemeistico

La conclusione segue come sopra.

Oss. Il sup di una famiglia di funzioni continue in generale è solo SCI.



$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 3 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Def. (Inviluppo SCI)

Sia (X, d) metrico e sia $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una funzione, senza ulteriori ipotesi.

Si definisce inviluppo SCI di $f(x)$ la funzione

$$\hat{f}(x) := \sup \{ g(x) : g \text{ è SCI e } g(y) \leq f(y) \forall y \in X \}$$

Oss 1 L'inviluppo SCI è ben definito a meno di ammettere funzioni $g: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ (così sono sicuro che almeno $g(x) \equiv -\infty$ contribuisce al sup).

Oss 2 L'inviluppo SCI $\hat{f}(x)$ è SCI (è sup di SCI)

Def. (Rilassamento di f).

Sia (X, d) metrico, e sia $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ qualunque.

Si dice rilassata di f la funzione

$$\bar{f}: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

definita da

$$\bar{f}(x) := \inf \{ \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) : x_n \rightarrow x \}.$$

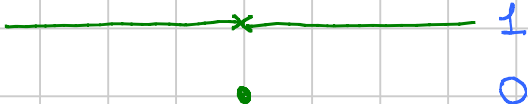
↑
l'inf è fatto su tutte le succ. $x_n \rightarrow x$

Oss. Il rilassato non è definito come

$$\bar{f}(x) = \liminf_{y \rightarrow x} f(y)$$

NO!!!

Infatti nella definizione di $\bar{f}(x)$ è ammessa la succ. $x_n \equiv x$



Il liminf nel pto strano è 1, ma il rilassato è 0.

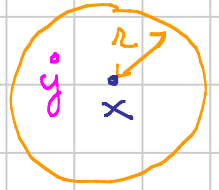
Lemma fondamentale (X, d) e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ come sempre.

Allora

$\forall x \in X, \forall r > 0, \forall \varepsilon > 0 \exists y \in X$ tale che

$$d(x, y) \leq r$$

$$f(y) \leq \bar{f}(x) + \varepsilon$$



Dim. Dato $\varepsilon > 0$ per definizione di $\inf$ esiste $x_n \rightarrow x$ tale che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \leq \bar{f}(x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Per le proprietà del $\liminf$ si avrà che

$$f(x_n) \leq \bar{f}(x) + \varepsilon \quad \text{per infiniti indici } n$$

(se non fosse vera per ∞ indici, sarebbe vera $\geq \liminf$, ma allora...)

Dico che ponendo $y := x_n$ per n abbastanza grande tra questi indici abbiamo la tesi

$$d(y, x) \leq r$$

vera per n
abbastanza grande
visto che $x_n \rightarrow x$

$$f(y) \leq \bar{f}(x) + \varepsilon$$

vera per
l'insieme di indici di sopra

— o — o —

Proprietà 1 di $\bar{f}$

$$\bar{f}(x) \leq f(x) \quad \text{per ogni } x \in X$$

Dim Basta considerare la succ. costante $x_n := x$

$$\bar{f}(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x).$$

Proprietà 2 di $\bar{f}$ $\bar{f}(x) \geq \hat{f}(x)$ per ogni $x \in \mathbb{X}$

Dim. Sia $x_n \rightarrow x$ una qualunque successione. Allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \hat{f}(x_n) \geq \hat{f}(x)$$

$\uparrow$ uso che $\hat{f} \leq f$ $\uparrow$ uso che $\hat{f}$ è scl

Facendo l'inf. sulle s.succ. ho la tesi.

Proprietà 3 di $\bar{f}$ L'inf nella definizione è in realtà un min, cioè

$$\bar{f}(x) = \min \{ \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) : x_n \rightarrow x \} \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Dim. Basta che trovi una successione $x_n \rightarrow x$ che realizza l'uguaglianza.

Uso il lemma fondamentale con $r = \frac{1}{n}$ e $\varepsilon = \frac{1}{n}$.
Trovo un pto y_n t.c.

$$d(x, y_n) \leq \frac{1}{n}$$

$\downarrow$
 $y_n \rightarrow x$

$$f(y_n) \leq \bar{f}(x) + \frac{1}{n}$$

$\downarrow$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(y_n) \stackrel{(\ast)}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\bar{f}(x) + \frac{1}{n} \right) = \bar{f}(x)$$

D'altra parte è gratis che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(y_n) \geq \bar{f}(x).$$

— o — o —

Def. (Recovery sequence) Siano (X, d) , f e $\bar{f}$ come sempre.
Si dice recovery sequence ogni succ. $x_n \rightarrow x$ t.c.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \bar{f}(x)$$

Oss. Abbiamo dim. sopra che esistono delle recovery per ogni p.to $x \in X$.

Dim. Prendo y_n come prima e ho che

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\bar{f}(x) + \frac{1}{n} \right) = \bar{f}(x). \end{aligned}$$

Quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = \bar{f}(x)$.

Proprietà 4 di $\bar{f}$ $\bar{f}$ è sci

Dim. Sia $x_n \rightarrow x_\infty$ una succ. qualunque. Voglio che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \bar{f}(x_n) \geq \bar{f}(x_\infty)$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ uso il lemma con $x = x_n$, $r = \frac{1}{n}$, $\varepsilon = \frac{1}{n}$.
Trovo y_n t.c.

$$d(y_n, x_n) \leq \frac{1}{n} \quad f(y_n) \leq \bar{f}(x_n) + \frac{1}{n}.$$

Dico che $y_n \rightarrow x_\infty$. Facile perché

$$0 \leq d(y_n, x_\infty) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x_\infty)$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

Quindi y_n collabora alla def. di $\bar{f}(x_\infty)$, cioè

$$\begin{aligned}\bar{f}(x_\infty) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(y_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\bar{f}(x_n) + \frac{1}{n} \right) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad y_n \rightarrow x_\infty \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \bar{f}(x_n) \\ &\stackrel{(*)}{=} \end{aligned}$$

che è la tesi

Proprietà 5 di $\bar{f}$

$$\bar{f}(x) = \hat{f}(x) \quad \forall x \in X$$

Dim.

$$\bar{f}(x) \geq \hat{f}(x)$$

Fatto prima

$$\bar{f}(x) \leq \hat{f}(x)$$

Basta osservare che $\bar{f}$ è scf e
 $\bar{f}(x) \leq f(x) \quad \forall x \in X$

La tesi segue dalla def. di $\hat{f}(x)$ come sup delle scf che stanno sotto.