

Esempio classico di non unicità

$$\begin{cases} u'' = -\lambda \sin u \\ u(0) = 0 \\ u(2) = 0 \end{cases}$$

Per ogni valore di  $\lambda$  il pbm ha la soluzione  $u(x) \equiv 0$ .

Se  $\lambda$  è abbastanza grande, allora c'è almeno un'altra soluz.

Idea: considero il funzionale

$$F(u) := \int_0^2 \frac{1}{2} u'^2 + \lambda \cos u$$

che ha l'eq. data come (ELE) e dimostro che per  $\lambda$  grande il min. esiste e non è la funzione nulla.

Esistenza del minimo: metodo diretto standard (la cpt. segue dalla limitatezza inferiore)

Il minimo non è  $u_0(x) \equiv 0$   $F(u_0) = 2\lambda$

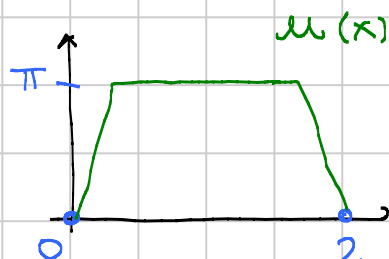
Basta trovare una  $u$  qualunque t.c.  $F(u) < 2\lambda$

Prendo  $u(x)$  come in figura e osservo che

$$\int_0^2 \cos(u(x)) < 0$$

Ora  $\underbrace{\int_0^2 \frac{1}{2} u'^2}_{\text{può essere enorme}} + \lambda \int_0^2 \cos u(x)$

ma per  $\lambda$  grande la somma è  $< 0$ , quindi  $< 2\lambda$



Esempio Dimostrare che l'equazione

$$\ddot{u} = \arctan u + \sin x$$

ha almeno una soluzione periodica.

Sembra ragionevole cercare una soluzione di periodo  $2\pi$  (non nec. minimo).

Considero il funzionale

$$F(u) := \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \dot{u}^2 + g(u) + (\sin x) u$$

primitiva di  
 $\arctan$

$$L(x, s, p) := \frac{1}{2} p^2 + g(s) + (\sin x) s \quad (L_p)' = L_s$$

L'equazione data è ELE del funzionale

Minimizzo  $F(u)$  con BC  $u(0) = u(2\pi)$ .

Se ci riesce nasceranno BC  $\dot{u}(0) = \dot{u}(2\pi)$ , quindi la soluzione si troverà in  $2\pi$  nelle stesse cond. di Cauchy in cui si trova in  $x=0$ . Questo dice (per unicità del pbm. di Cauchy) che la soluzione continuata dopo  $2\pi$  si ripete.

[Più formalmente  $u(x)$  e  $v(x) = u(x+2\pi)$  risolvono lo stesso pbm. di Cauchy].

Tutto sta a risolvere il pbm

$$\min \{ F(u) : u(0) = u(\pi) \}$$

con il metodo diretto.

1 Formulazione debole in  $H^1 \rightsquigarrow$  nessun pbm., basta osservare che  $u(0) = u(\pi)$  ha senso in  $H^1$

3 SCI  $\rightsquigarrow$  tutto tranquillo come sempre

2 Compattezza

☹ La parte  $\psi(x, s) = g(s) - (\sin x) s$  non è limitata dal basso

☺ In realtà

$$\psi(x, s) \geq -s$$

e questo potrebbe bastare

☹ Non abbiamo BC che tengano basso il valore di  $u$  in un pto.

☺  $g(s)$  cresce a  $\pm \infty$  come  $\frac{\pi}{2} |s|$  e questo si mangia  $(\sin x) u$ .

Supponiamo di essere tu un sottolivello, quindi

$$F(u_n) \leq M$$

Da questo deduco che  $\int_0^{2\pi} g(u_n) + (\sin x) u_n \leq M$

Da questo deduco che esiste  $x_n \in [0, 2\pi]$  t.c.

$$g(u_n(x_n)) + (\sin x_n) u_n(x_n) \leq \frac{M}{2\pi} \quad (\text{teo. media integrale})$$

e a maggior ragione

$$g(u_n(x_n)) - |u_n(x_n)| \leq \frac{M}{2\pi}$$

Ossewo che la funzione  $g(s) - |s|$  tende a  $+\infty$  per  $s \rightarrow \pm \infty$  perché  $g(s) \sim \frac{\pi}{2} |s|$  per  $s \rightarrow \pm \infty$

Ne deduco che

$$|u_n(x_n)| \leq M_1$$



Ora al solito modo ottengo che

$$|u_n(x)| \leq |u_n(x_n)| + |u_n(x) - u_n(x_n)|$$

$$\leq M_1 + \|\dot{u}_n\|_{L^2} |x - x_n|^{1/2}$$

$$\leq M_1 + \|\dot{u}_n\|_{L^2} \sqrt{2\pi}$$

A questo punto posso stimare il funzionale come

$$M \geq F(u_n) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \dot{u}_n^2 + \underbrace{g(u_n)}_{\geq 0} + \underbrace{(g(x) u_n)}_{\geq -|u_n|}$$

$$\geq \frac{1}{2} \|\dot{u}_n\|_{L^2}^2 - \int_0^{2\pi} |u_n(x)| dx$$

$$= \frac{1}{2} \|\dot{u}_n\|_{L^2}^2 - (M_1 + \|\dot{u}_n\|_{L^2} \sqrt{2\pi}) \cdot 2\pi$$

$\uparrow$  grado 2                       $\uparrow$  grado 1

Si tratta di equ. di 2° grado in  $\|\dot{u}_n\|_{L^2}$ , che è verificata per valori interni.

Da questo deduco che

$$\|\dot{u}_n\|_{L^2} \leq M_2$$



Ora finalmente ho

- una equi-lim. su  $\|\dot{u}_n\|_{L^2} \rightsquigarrow \dot{u}_{n_k} \rightarrow v_\infty$
- una equi-lim su  $|u_n(x)| \overset{\text{A.A.}}{\rightsquigarrow} u_{n_k} \rightarrow u_\infty$

[4] Regolarità  $\leadsto$  tranquilla come sempre.

Esempio  $\int_0^{2\pi} (\dot{u}^2 - u)$   $u(0) = u(2\pi)$

$\inf = -\infty$  e min N.E. (basta prendere  $u_n(x) \equiv n$ )

Esempio  $\ddot{u} = \frac{\cos x \cdot u^3}{1 + \dot{u}^2}$   $u(0) = 2$   
 $u(1) = 3$

$$\ddot{u} (1 + \dot{u}^2) = \cos x \cdot u^3$$

$$F(u) = \int_0^1 \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{12} \dot{u}^4 + \frac{1}{4} \cos x \cdot u^4$$

$$L(x, s, p) = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{12} p^4 + \frac{1}{4} \cos x \cdot s^4$$

$$(L_p)' = L_s \quad ; \quad (p + \frac{1}{3} p^3)' = \cos x \cdot s^3 \quad (\dot{u} + \frac{1}{3} \dot{u}^3)' = \cos x \cdot u^3 \quad \text{☺}$$

$$\min \{ F(u) : u(0) = 2, u(1) = 3 \}$$

[1] Formulazione debole in  $H^1$ . Si intende che  $F(u) = +\infty$  quando  $u \notin W^{1,4}$

[3] SCI  $\leadsto$  facile come sempre : serve che  $\frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{12} p^4$  è convessa

[2] CPT ☺  $\cos x \geq 0$  in  $[0, 1]$ , quindi da  $F(u_n) \leq M$   
deduco  $\|\dot{u}_n\|_2 \leq 2M$

Oss. Se fosse con l'integrale in  $[0, 2]$  il minimo del funzionale non esisterebbe e anzi  $\inf = -\infty$  (in realtà non è detta, perché potrebbe salvarci  $\dot{u}^4$  che ha lo stesso esponente).

#### 4 Regolarità

Ragionando come sempre si arriva a

$$-\int_0^1 (u + \frac{1}{3} u^3)' v = \int_0^1 \cos x \cdot u^3 \cdot v$$

Questa ci dice che  $u + \frac{1}{3} u^3 \in H^1$  e la sua deriv. debole è  $\cos x \cdot u^3$ , da cui

$$(u + \frac{1}{3} u^3)' = \cos x \cdot u^3$$

in senso debole.

$$u \in H^1 \Rightarrow u \in C^0 \Rightarrow \cos x \cdot u^3 \in C^0 \Rightarrow (u + \frac{1}{3} u^3)' \in C^0$$

$$\Rightarrow u + \frac{1}{3} u^3 \in C^1 \stackrel{?}{\Rightarrow} u \in C^1 \Rightarrow u \in C^2.$$

L'ultima è vera perché  $\varphi(p) = p + \frac{1}{3} p^3$  è invertibile con inversa  $C^1$  in quanto

$$\varphi'(p) = 1 + p^2 \geq 1$$

Ma allora

$$u = \varphi^{-1}(\cos x \cdot u^3) \in C^1 \text{ perché composiz. di } C^1.$$