

REVERSE ENGINEERING Approccio variazionale alle eq. diff.

Esempio $\begin{cases} \ddot{u} = \arctan u \\ u(0) = 0 \\ u(2) = 3 \end{cases}$

Obiettivo: studiare esistenza, unicità e reg. della soluzione

Oss. Teoremi di esistenza / unicità di Analisi 2 riguardano pbm. di Cauchy. Qui invece abbiamo DBC.

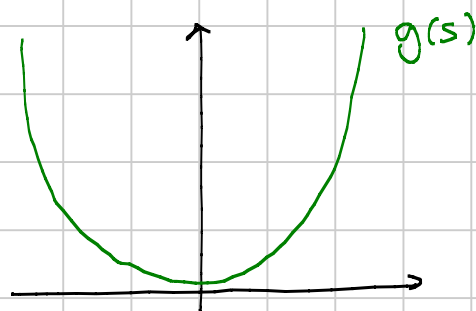
Idea: vedere il pbm. dato come (ELE) di un pbm. di minimo

$$\min \left\{ \int_0^2 \left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 + g(u) \right] dx : u(0) = 0, u(2) = 3 \right\}$$

dove $g(s) := \int_0^s \arctan t \, dt$

è una funzione

- non-negativa
- pari
- convessa strettamente
- C^∞ .



$$L(x, s, p) := \frac{1}{2} p^2 + g(s)$$

$$(L_p)' = L_s$$

$$(\ddot{u})' = \arctan u$$

Poniamo $F(u) := \int_0^2 \left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 + g(u) \right] dx$

e applichiamo il metodo diretto.

[1] Formulazione debole

$$\hat{F}(u) := \int_0^2 \left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 + g(u) \right] dx \quad u \in H^1((0,2))$$

$\uparrow$
deriv. debole

Osservo che $\hat{F}(u)$ e le DBC sono ben definite in H^1

[2] Compattezza Rispetto alla nozione di conv.

$$u_m \rightarrow u \quad \text{unif. in } [0,2]$$

$$\dot{u}_m \rightarrow \dot{u}$$

$$\hat{F}(u_m) \leq M \Rightarrow \int_0^2 \dot{u}_m^2 \leq 2M$$

$\uparrow$
ho usato
 $g(s) \geq 0$

$$\leadsto \dot{u}_{m_k} \rightharpoonup v_\infty \quad \text{debole in } L^2((0,2))$$

Per lo stesso motivo le u_m sono equi $\frac{1}{2}$ -Hölder.

Grazie alle DBC (ne basterebbe una) sappiamo che $|u_m(x)|$ sono equilimitate.

Estraendo un'ulteriore s.succ. deduciamo che

$$u_{m_k} \rightarrow u_\infty \quad \text{unif. in } [0,2].$$

Ragionando come sempre si deduce che $\dot{u}_\infty = v_\infty$.

[3] SCI Se $u_m \rightarrow u_\infty$ come nella nozione, allora

$$\liminf \int_0^2 \frac{1}{2} \dot{u}_m^2 \geq \int_0^2 \frac{1}{2} \dot{u}_\infty^2, \quad \int_0^2 g(u_m) \rightarrow \int_0^2 g(u_\infty)$$

$\uparrow$
la norma è
SCI

$\uparrow$
conv. unif.
+ continuità di g .

[4] Il pbm. di min. ammette almeno una soluz. in H^1 .
Voglio dim. che è C^∞ .

$$\begin{aligned}\varphi(t) &:= \hat{F}(u+tv) \\ &\quad \text{p.to min.} \quad \uparrow \in C_c^\infty(0,2) \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2} (\dot{u}+t\dot{v})^2 + g(u+tv)\end{aligned}$$

Derivando sotto il segno di integrale

$$\varphi'(t) = \int_0^2 \boxed{(\dot{u}+t\dot{v})\dot{v} + g'(u+tv)v}$$

$\psi(x,t)$

Oss. Per derivare sotto il segno di integrale serve come hp che

$$|\psi(x,t)| \leq \hat{\psi}(x) \quad \forall x \in [0,2]$$

$\uparrow$
integrabile

$$\forall t \in [-\delta, \delta]$$

Nel nostro caso

$$|\psi(x,t)| \leq \underbrace{(|\dot{u}(x)| + \delta |\dot{v}(x)|)}_{\substack{\in L^2, \text{ dunque} \\ \text{in particolare } \in L^1}} \underbrace{|\dot{v}(x)|}_{\text{limit.}} + \underbrace{\frac{\pi}{2} |\dot{u}(x)|}_{\text{limitato}}$$

Tornando alla formula di sopra, se u è p.to min, allora

$$\begin{aligned}0 = \varphi'(0) &= \int_0^2 \dot{u}\dot{v} + \arctan u \cdot v \\ - \int_0^2 \dot{u}\dot{v} &= \int_0^2 \arctan u \cdot v\end{aligned}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $\neq$ φ g φ

Da qui deduciamo che $\dot{u} \in H^1$ e $(\dot{u})' = \arctan u$

Quindi u è soluzione in senso molto debole di

$$\underbrace{(\ddot{u})'} = \arctan u$$

derivata debole
di $\ddot{u}$

Passo iniziale della regolarità:

$$u \in H^1 \Rightarrow u \in C^0 \Rightarrow \arctan u \in C^0 \Rightarrow (\ddot{u})' \in C^0$$

$$\Rightarrow \ddot{u} \in C^1 \Rightarrow u \in C^2$$

$$\Rightarrow u \text{ risolve } \ddot{u} = \arctan u \text{ in senso classico.}$$

Bootstrap: $u \in C^2 \Rightarrow \arctan u \in C^2 \Rightarrow \ddot{u} \in C^2 \Rightarrow u \in C^4$
e così via fino a C^∞ .

FIN QUI ABBIAMO DIM. ESISTENZA E REGOLARITÀ.
— o — o —

UNICITÀ Dico che la soluzione è unica.
Per dimostrarlo ci sono due metodi.

Approccio variazionale (Guardo il funzionale!)

Osservo che $L(s, p) = \frac{1}{2} p^2 + g(s)$ è strett. conv. nella coppia (s, p)

Quindi ogni soluzione di Eulero è p.to di min. stretto, dunque anche unico.

Ogni soluzione di Eulero in che senso? Bastano soluzioni $u \in H^1$ che annullano la prima forma integrale. Basta fare il solito conto con $F(w) = F(u + \underbrace{(w-u)}_{\checkmark}) = \dots$

Approccio differenziale (Guarolo & equazione)

Supponiamo di avere 2 soluzioni

$$\ddot{u}_1 = \arctan(u_1)$$

$$\ddot{u}_2 = \arctan(u_2)$$

Sottraggo e pongo $w := u_1 - u_2$

$$\ddot{w} = \arctan(u_1) - \arctan(u_2)$$

Moltiplico LHS e RHS per $u_1 - u_2$:

$$(u_1 - u_2)(\ddot{u}_1 - \ddot{u}_2) = \underbrace{(u_1 - u_2)(\arctan u_1 - \arctan u_2)}_{\geq 0}$$

sempre (segue dal fatto che $\arctan x$ è crescente)

Quindi

$$w\ddot{w} \geq 0 \quad \text{sempre}$$

$$0 \leq \int_0^2 w\ddot{w} = \underbrace{[w\dot{w}]_0^2}_{=0} - \int_0^2 \dot{w}^2 \leadsto \int_0^2 \dot{w}^2 \leq 0$$

$$\dot{w} \equiv 0$$

w costante $\leadsto w \equiv 0$

lo $\uparrow$ è al bordo!

Approfondimento: quale regolarità abbiamo veramente usato su u_1 e u_2 ?

— 0 — 0 —

Possibili varianti

Consideriamo sempre $\ddot{u} = \arctan u$
ma con diverse BC.

① $u(0) = 3, \dot{u}(2) = 0 \rightsquigarrow$ considero lo stesso $F(u)$ ma
minimizzo con il solo vincolo
che $u(0) = 3$.

La NBC in 2 nasce strada
facendo

② $\dot{u}(0) = 0, \dot{u}(2) = 0 \rightsquigarrow$ minimizzo $F(u)$ senza
ulteriori condizioni.

Le due NBC nascono on the
road

(teniamo presente che i valori puntuali non hanno senso
per funzioni L^2).

③ $\dot{u}(0) = 3, u(2) = 5$

Due possibili approcci

Modifico il funzionale

$$F(u) = \int_0^1 \frac{1}{2} \dot{u}^2 - 3 \dot{u} + g(u)$$

$$L(s, p) := \frac{1}{2} p^2 - 3p + g(s)$$

Le NBC che nascono sono
del tipo $L_p(u, \dot{u}) = 0$
cioè $\dot{u} - 3 = 0$, cioè $\dot{u} = 3$.
(Eulero resta la stessa)

Cambio variabile

$u(x) = v(x) + 3x$ e vedo cosa risolve v :

$$\ddot{v} = \ddot{u} = \arctan(u) = \arctan(v + 3x)$$

$$v(2) = -1$$

$$F(v) := \int_0^2 \frac{1}{2} \dot{v}^2 + g(v + 3x) dx \rightsquigarrow$$

nasce $\dot{v}(0) = 0$ e
quindi $\dot{u}(0) = 3$.