

Rivisitazione della compattezza

Supponiamo di avere $F(u) := \int_a^b [\dot{u}^2 + g(x, u)] dx$

Sotto quali ipotesi posso dedurre che

$$F(u_n) \leq M \quad \Rightarrow \quad u_{n_k} \rightarrow u_\infty \text{ nel solito senso?}$$

Caso facile Se $g(x, u)$ è limitata dal basso, è facile

$$g(x, s) \geq -A \quad \text{per ogni } x \in [a, b], \forall s \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$M \geq \int_a^b \dot{u}_n^2 + g(x, u_n) \geq \int_a^b \dot{u}_n^2 - A(b-a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b \dot{u}_n^2 \leq M + A(b-a)$$

$$\Rightarrow \text{limitazione norma } L^2 \Rightarrow \dot{u}_{n_k} \rightarrow v_\infty.$$

Per usare A.A. sulle funzioni serve qualcosa che limiti le funzioni, ad esempio

- una BC (limita in un p.to, da cui limitazione globale per equi-hölderianità)

- una convol. integrale del tipo $\int_a^b |u_n(x)|^p dx \leq M$

$$\rightarrow \text{per teo. media integrale } \exists x_n \text{ t.c. } |u_n(x_n)|^p \leq \frac{M}{b-a}$$

Fatto generale Supponiamo che $u_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ siano

- equi α -hölderiane $|u_n(x) - u_n(y)| \leq M_1 |x - y|^\alpha$
stessi per ogni n
- esiste x_n (anche dip. da n) t.c.

$$|u_n(x_n)| \leq M_2$$

↑
indip. da n

Allora possiamo usare Ascoli - Arzelà

Dim. L'equicontinuità segue dall'equi-hölder
L'equilimitatezza globale segue da quella in un pto

$$|u_n(x)| \leq \underbrace{|u_n(x_n)|}_{\leq M_2} + \underbrace{|u_n(x) - u_n(x_n)|}_{\leq M_1 |x - x_n|^\alpha \leq M_1 |b - a|^\alpha}$$

— o — o —

Caso meno facile, ma non difficile

$$F(u) := \int_a^b \dot{u}^2 - u$$

Così non ci sarebbe compattezza: prendo $u_n(x) := -n$
e queste stanno in un s.livello qualunque.

Le cose cambiano se aggiungo una BC, tipo $u(a) = \gamma$

$$|u(x)| \leq \underbrace{|u(a)|}_{\gamma} + |u(x) - u(a)| \leq \|\dot{u}\|_{L^2} |x - a|^{1/2} \leq \|\dot{u}\|_{L^2} (b - a)^{1/2}$$

Quindi in ogni sottolivello $F(u) \leq M$ possiamo dedurre

$$\begin{aligned} M \geq F(u) &= \int_a^b \dot{u}^2 - u \geq \int_a^b \dot{u}^2 - \int_a^b \|\dot{u}\|_{L^2} (b-a)^{1/2} \\ &= \|\dot{u}\|_{L^2}^2 - \|\dot{u}\|_{L^2} (b-a)^{3/2} \end{aligned}$$

È una diseq. di 2° grado in $\|\dot{u}\|_{L^2}$

$$\|\dot{u}\|_{L^2}^2 - \text{cost} \|\dot{u}\|_{L^2} \leq M$$

che è verificata per "valori interni", quindi $\|\dot{u}\|_{L^2}$ non può essere troppo grande.

Da una stima $F(u_n) \leq M$, deduciamo $\|\dot{u}_n\|_{L^2} \leq M_1$,
→ da qui come sopra.

Morale $F(u) = \int_a^b \dot{u}^2 + g(x, u)$

Se so che esistono A, B reali e $p < 2$ t.c.

$$g(x, s) \geq -A - B|s|^p \quad \forall (x, s) \in [a, b] \times \mathbb{R}$$

Allora, se ho anche una B_c , ho l'implicazione

$$F(u_n) \leq M \quad \Rightarrow \quad \|\dot{u}_n\|_{L^2} \leq M_1$$

e questa è quella che serve per fare compattezza

Dim. Con il discorso di prima si arriva a

$$\|\dot{u}\|_{L^2}^2 + \text{cost} \cdot \|\dot{u}\|_{L^2}^p \leq M$$

Più in generale, per funzionali

$$\int_a^b |u|^p + g(x, u)$$

basta avere $g(x, s) \geq -A - B|s|^q$ con $q < p$.

Esempio $\min \left\{ \int_a^b u^2 + u^3 : u(a) = u(b) = 0 \right\}$ non esiste

Dim. Prendo una qualunque funzione $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che sia negativa in (a, b)

$$F(mu) = \int_a^b m^2 u^2 + m^3 u^3 = m^2 \int_a^b u^2 + m^3 \underbrace{\int_a^b u^3}_{< 0}$$

$\leadsto \inf = -\infty$.

Esempio $\min \left\{ \int_a^b u^2 + \underbrace{u^3 + u^4}_{g(u)} : u(a) = u(b) = 0 \right\}$ esiste

$g(u)$ è limitata dal basso $\leadsto$ metodo diretto standard

Esempio $\min \left\{ \int_a^b u^2 + \underbrace{u^3 + u^4}_{g(u)} \right\}$ SENZA BCS

Il minimo esiste.

Come ottengo la compattezza?

$g(u)$ limitata dal basso, quindi $F(u_n) \leq M \Rightarrow \|u_n\|_2 \leq M_1$

Mi serve qualcosa che limiti le funzioni !!!

$$g(u) \geq \frac{1}{2} u^4 - A \quad \leadsto \quad F(u_n) \leq M \Rightarrow \int u_n^4 \leq M_1$$

$$u^3 + \frac{1}{2} u^4 \geq -A \quad \text{😊}$$

$$\Rightarrow \exists x_n \text{ b.c. } |u_n(x_n)| \leq M_2$$

Rivisitazione della SCI

- Parte dipendente da u . Se $u_m \rightarrow u_\infty$ unif., allora

$$\int_a^b g(x, u_m(x)) dx \rightarrow \int_a^b g(x, u_\infty(x)) dx$$

purché $g(x, s)$ sia almeno continua (analisi 2).

Oss. Se so che g è SCI in s e limitata dal basso, allora posso usare Fatou e dedurre che

$$\begin{aligned} \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_a^b g(x, u_m(x)) dx &\geq \int_a^b \liminf_{m \rightarrow \infty} g(x, u_m(x)) dx \\ &\geq \int_a^b g(x, u_\infty(x)) dx \end{aligned}$$

- Parte dipendente da u : banale se si tratta di $\int_a^b u^2$

In generale, è una questione di convessità.

Teorema Sia $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

Sia $v_m: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di fcnz. t.c.

$$v_m \rightarrow v_\infty$$

Allora

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \psi(v_m(x)) dx \geq \int_a^b \psi(v_\infty(x)) dx$$

Dim. Barro e assumo $\psi \in C^1$. Allora vale

$$\psi(a+b) \geq \psi(a) + b \psi'(a) \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b \psi(v_m(x)) dx &= \int_a^b \psi \left(\underbrace{v_\infty(x)}_a + \underbrace{v_m(x) - v_\infty(x)}_b \right) dx \\
&\geq \int_a^b \psi(v_\infty(x)) + \psi'(v_\infty(x)) \cdot (v_m(x) - v_\infty(x)) \\
&= \int_a^b \psi(v_\infty(x)) dx + \underbrace{\int_a^b \psi'(v_\infty(x)) \cdot (v_m(x) - v_\infty(x)) dx}_0
\end{aligned}$$

Quando passo al liminf ho la tesi.

Ho barato anche nell'assumere $\psi'(v_\infty(x)) \in L^2$. Per questo sarebbe utile una stima del tipo

$$|\psi'(p)| \leq A + Bp^2 \quad \forall p \in \mathbb{R}.$$

— o — o —

Se voglio evitare di barare devo usare un lemma di approx.

Lemma Per ogni $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa, esiste una famiglia di funzioni

$$\psi_\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

tali che

- (i) sono convesse
- (ii) sono di classe C^1
- (iii) stanno sotto ψ , cioè $\psi(x) \geq \psi_\varepsilon(x)$
- (iv) tendono a ψ crescendo (più ε è piccolo, più sono grandi)
- (v) tutte le ψ_ε hanno derivata limitata (non equi)

Dato il lemma posso non barare più. Infatti

$$\int_a^b \psi(v_m) \geq \int_a^b \psi_\varepsilon(v_m) \quad \forall \varepsilon > 0$$

Quindi

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi(v_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_\varepsilon(v_n) \\ &\geq \int_a^b \psi_\varepsilon(v_\infty) \\ &\quad \uparrow \\ &\text{tes. non barata} \end{aligned}$$

Ora per Beppo Levi vale

$$\int_a^b \psi(v_\infty) = \sup_{\varepsilon > 0} \int_a^b \psi_\varepsilon(v_\infty)$$

— 0 — 0 —