

METODO DIRETTO Per dimostrare che esiste $\min F(u)$

ROAD MAP

- ① FORMULAZIONE DEBOLE Estendere $F(u)$ ad un ambiente più grande dei soliti $C^1([a,b])$, $C^\infty([a,b])$
 $\leadsto$ spazi di Sobolev
- ② COMPATTEZZA Dimostrare che i sottolivelli di $F(u)$ sono cpt. rispetto a qualche nozione di convergenza
- ③ SEMI CONTINUITÀ Dimostrare che F è sci rispetto alla stessa nozione di conv. $\leadsto$ esiste il minimo nell'ambiente più vasto
- ④ REGOLARITÀ Dim. che i pti di minimo in realtà stanno anche nell'ambiente originario.

Esempio $F(u) := \int_0^2 [\dot{u}^2 + \sin(u^5)] dx$

Voglio dim. che $F(u)$ ammette minimo in

$$\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,2]) : u(0) = 0, u(2) = 2017\}$$

① Formulazione debole Consideriamo l'ambiente

$$\hat{\mathbb{X}} := \{u \in H^1((0,2)) : u(0) = 0, u(2) = 2017\}$$

Oss. 1 - $\int \dot{u}^2$ è ben definito in H^1

2 - $u(0)$ e $u(2)$ sono ben def. perché le funz. di H^1 sono cont.

Considero $\hat{F} : \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$\hat{F}(u) := \int_0^2 [\dot{u}^2 + \sin(u^5)] dx \quad \forall u \in H^1((0,2))$$

$\uparrow$ derivata debole.

② Compattezza Devo dimostrare questa proprietà.

Dato una succ. $\{u_n\} \subseteq H^1((0,2))$ t.c.

$$\exists M \in \mathbb{R} : \underbrace{\hat{F}(u_n) \leq M}_{u_n \text{ sta in un sottolivello}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

allora esiste una s.succ. $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ in qualche senso.

$$\int_0^2 \dot{u}_m^2 - 2 \leq \int_0^2 \dot{u}_m^2 + \sin(u_m^5) \leq M$$

Da qui ottengo che

$$\int_0^2 \dot{u}_m^2 \leq M+2$$

che è come dire $\| \dot{u}_m \|_{L^2} \leq (M+2)^{1/2}$

Per compattezza debbe delle palle nell' Hilbert separabile $L^2((0,2))$ otteniamo una s.succ.

$$\dot{u}_{n_k} \rightharpoonup v_\infty \quad (\text{debole in } L^2)$$

Per i discorsi visti la les. precedente le funzioni u_{n_k} sono

- $\frac{1}{2}$ -Hölder con una costante comune (per via della stima L^2 su $\dot{u}_{n_k}$)
- equiuniformità per via dei dati al bordo e la stima equi $\frac{1}{2}$ -Hölder.

Quindi per Ascoli - Arzelà, a meno di ulteriori s. succ.,

$$u_{m_k} \longrightarrow u_\infty \quad (\text{uniform. in } [0, 2])$$

Mi piacerebbe tanto poter dire che $v_\infty = u_\infty$, ma questo segue da

$$\int_0^2 \lim_{m_k} u_{m_k}(x) \varphi(x) dx = - \int_0^2 u_{m_k}(x) \varphi'(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((0, 2))$$

$\downarrow$ basta $\downarrow$ c'è pure conv. unif. delle u_{m_k}
 $\downarrow$ la debole

$$\int_0^2 v_\infty(x) \varphi(x) dx = - \int_0^2 u_\infty(x) \varphi'(x) dx$$

Questo ci dice che $v_\infty = u_\infty$.

Conclusione: i sottolivelli di $\hat{F}$ sono compatti rispetto alla nozione di convergenza

$$u_m \rightharpoonup u_\infty \iff \begin{aligned} &u_m \longrightarrow u_\infty \text{ unif.} \\ &\dot{u}_m \longrightarrow \dot{u}_\infty \text{ debolm. in } L^2. \end{aligned}$$

③ Semicontinuità Devo dimostrare che per ogni successione con

$$\begin{aligned} u_m &\longrightarrow u_\infty \text{ unif.} \\ \dot{u}_m &\longrightarrow \dot{u}_\infty \end{aligned}$$

vale

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \hat{F}(u_m) \geq \hat{F}(u_\infty).$$

Esaminiamo separatamente i 2 pezzi

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^2 \sin(u_m^5) dx = \int_0^2 \sin(u_\infty^5) dx \quad (\text{Analisi 2 per conv. unif.})$$

Per l'altro pezzo uso la semicontinuità della norma negli sp. di Hilbert

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 u_n^2 dx \geq \int_0^2 u_\infty^2 dx.$$

Mettendo insieme le 2 ho la tesi.

④ Regolarità Dai primi 3 pti sappiamo che $\hat{F}$ ammette minimo in H^1 , anzi in $\hat{X}$.

Avrei dovuto osservare che se $u_n \in \hat{X}$ e convergono risp. alla nozione di conv., allora anche $u_\infty \in \hat{X}$, cioè rispetta le Bcs.

Questo segue dalla conv. unif.

(Avere solo la L^2 , anche forte, sulle funzioni non basterebbe).

Vogliamo ora dim. che i pti di min. sono in realtà di classe C^4 , anzi C^∞ .

Sotto road map :

- 4.1 Equazione di Eulero debole
- 4.2 Guadagnare la prima derivata
- 4.3 BOOTSTRAP.

Sia $u_0 \in \hat{X}$ un pto di min. Sia $v \in V = C_c^\infty((0,2))$

$$\varphi(t) := \hat{F}(u_0 + tv) = \int_0^2 (u_0 + tv)^2 + \sin((u_0 + tv)^5)$$

$$\varphi'(t) = \int_0^2 2 u_0 \dot{v} + 5 \cos((u_0 + tv)^5) (u_0 + tv)^4 v + 2t \int_0^2 \dot{v}^2 dx$$

↑
modulo poter derivare sotto il segno di integrale

$$\varphi'(0) = \int_0^2 2 u_0 \dot{v} + 5 \cos(u_0^5) u_0^4 v = 0$$

↑ se u_0 è pto di min

Riscrivo la relazione come

$$-\int_0^2 \underbrace{2\ddot{u}_0}_{\downarrow f} \underbrace{\dot{v}}_{\downarrow \dot{\varphi}} = \int_0^2 \underbrace{5\cos(u_0^5)u_0^4}_{\downarrow g} \underbrace{v}_{\downarrow \varphi}$$

Questa relazione ci dice che f è derivabile debolmente, e la sua derivata debole è g . Quindi $2\ddot{u}_0 \in H^1$ e

$$(2\ddot{u}_0)' = 5\cos(u_0^5)u_0^4 \quad \text{generalizzata in } L^2$$

Abbiamo già guadagnato una derivata: prima $\ddot{u}_0 \in L^2$ e ora già $\ddot{u}_0 \in H^1$.

Da qui parte il bootstrap:

$$\rightarrow u_0 \in H^1 \Rightarrow u_0 \text{ è continua} \Rightarrow 5\cos(u_0^5)u_0^4 \text{ è continua}$$

$$\Rightarrow 2\ddot{u}_0 \text{ ha derivata debole continua}$$

$$\Rightarrow 2\ddot{u}_0 \in C^1 \Rightarrow u_0 \in C^2 \quad (\text{è la primitiva della sua derivata debole})$$

Ora l'Equazione di Eulero è una vera equazione diff. con le derivate VERE

$$2\ddot{\ddot{u}}_0 = 5u_0^4 \cos(u_0^5).$$

Da qui parte il bootstrap vero

$$u_0 \in C^2 \Rightarrow \text{RHS} \in C^2 \Rightarrow u_0 \in C^4 \Rightarrow \text{RHS} \in C^4$$

e così via di 2 in 2 fino a C^∞ .