

Teorema (Le funzioni di Sobolev sono le primitive della loro derivata debole)

Sia $u \in W^{1,p}((a,b))$ e sia $v \in L^p((a,b))$ la deriv. debole.

Poniamo

$$U(x) := \int_a^x v(t) dt \quad \forall x \in (a,b)$$

Allora $u(x) = U(x) + \text{costante}$ per q.o. $x \in (a,b)$.

Dcm. Sia $\varphi \in C_c^\infty((a,b))$ una qualunque funzione test.

Allora

$$\int_a^b \dot{\varphi}(x) U(x) dx \stackrel{\text{def. } U}{=} \int_a^b \dot{\varphi}(x) \left(\int_a^x v(t) dt \right) dx$$

(T normale
risp. asse x)

$$= \iint_T \dot{\varphi}(x) v(t) dx dt$$

(T normale
risp. asse y)

$$= \int_a^b dt \int_a^b dx \dot{\varphi}(x) v(t)$$

Fubini - Tonelli)

$$= \int_a^b v(t) dt \underbrace{\int_a^b \dot{\varphi}(x) dx}_{\varphi(b) - \varphi(a) = -\varphi(a)}$$

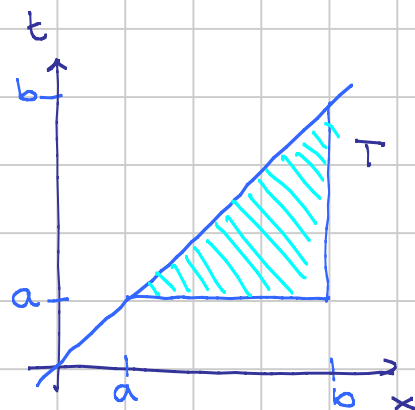
$$= - \int_a^b v(t) \varphi(a) dx$$

$$= - \int_a^b v(x) \varphi(x) dx$$

$$= \int_a^b u(x) \dot{\varphi}(x) dx$$

($u \in W^{1,p}$
e $u' = v$)

Lemma DBR $\Rightarrow$ Tesi



Teorema

W S H

Dim Prendo $u \in W^{1,p}(a,b)$ nel senso dell'integrazione per parti e faccio vedere che posso approssimarla nel senso (H).

Sia $v \in L^p(a,b)$ la deriv. debole di u .

Approssimo v in L^p con funzioni $v_m \in C^\infty$ (volendo anche a supporto compatto) e pongo

$$u_m(x) := \int_a^x v_m(t) dt$$

Osservo che $u_m \in C^\infty(a,b)$ (non nec. a spt. cpt.)

$u_m' = v_m \rightarrow v$ in $L^p(a,b)$ per ipotesi

$$u_m \xrightarrow{L^p} \int_a^x v(t) dt \quad (\text{per convergenza dominata})$$

$$= u(x) + \text{costante} \quad (\text{per teorema precedente})$$

Quindi $u_m(x) - \text{costante}$ sono le approx. richieste.

Conseguenza

A seconda dei casi possiamo usare la def. più comoda.

Conseguenza 2

Si possono definire gli spazi di Sobolev come le primitive delle funzioni in $L^p(a,b)$.

— o — o —

TEOREMA (Hölderianità delle funzioni di Sobolev)
 (vale solo in dim. 1 ed è il motivo per cui in dim. maggiore le cose si complicano).

Sia $p > 1$, sia q l'esponente coniugato ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)
 e sia $u \in W^{1,p}(a,b)$.

Allora

$$u \in C^{1/q}(a,b) \quad (u \text{ è } \frac{1}{q}\text{-Hölderiana})$$

e vale

$$|u(y) - u(x)| \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{deriv. debole}}}{\|u'\|_{L^p(a,b)}} \cdot |y-x|^{1/q} \quad \begin{matrix} \forall x \in (a,b) \\ \forall y \in (a,b) \end{matrix}$$

In particolare u è continua !!!

Dim Già sappiamo che u è la primitiva della sua derivata debole, quindi

$$\begin{aligned} |u(y) - u(x)| &= \left| \int_x^y u'(t) dt \right| \\ &\leq \int_x^y \underbrace{|u'(t)|}_{\in L^p} \cdot \underbrace{1}_{\in L^q} dt \\ &\leq \left(\int_x^y |u'(t)|^p dt \right)^{1/p} \cdot \left(\int_x^y 1^q dt \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int_a^b |u'(t)|^p dt \right)^{1/p} |y-x|^{1/q} \\ &= \|u'\|_{L^p(a,b)} \cdot |y-x|^{1/q}. \end{aligned}$$

— o — o —

Teo. Ascoli - Arzelà

Siano $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di funs.

Supponiamo che

(i) (Equi-limitate)

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |f_n(x)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a, b]$$

(ii) (Equi-continuità)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c.}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad y \in [a, b] \cap (x - \delta, x + \delta) \text{ vale } |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$$

Allora esiste s.succ. che conv. unif., cioè $\exists n_k$ succ. cresc. di interi, ed esiste $f_\infty : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{array}{ccc} f_{n_k}(x) & \rightarrow & f_\infty(x) \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{array} \text{ UNIFORM. in } [a, b].$$

Variaute metrica

Siano $f_n : X \rightarrow Y$

$\uparrow$ metrica $\uparrow$

Ipotesi

(i) (compattezza a x fisso)

$$\forall x \in X \quad \exists K_x \subseteq Y \text{ cpt. t.c. } f_n(x) \in K_x \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(ii) (equi-continuità) esattamente come sopra

(iii) X compatto.

Allora esiste $f_{n_k}(x) \rightarrow f_\infty(x)$ unif. in X .

(se non assumiamo X compatto, ma solo unione num. di cpt., allora la tesi diventa conv. unif. sui cpt.)

Oss. Torniamo al caso $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Se so che f_n sono equi α -Hölderiane, cioè

$$\exists \alpha \in (0, 1) \exists H \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |u_n(y) - u_n(x)| \leq H |y - x|^\alpha$$
$$\forall n \in \mathbb{N}$$
$$\forall (y, x) \in (a, b)^2$$

Allora è gratis l'equicontinuità.

Torniamo alla def. (H). Sappiamo che

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } L^p$$
$$\dot{u}_n \rightarrow v \quad \text{in } L^p$$

Deduciamo che esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\|u_n\|_{L^p} \leq M$$

$$\|\dot{u}_n\|_{L^p} \leq M$$

- Dalla seconda, deduciamo che $\{u_n\}$ sono equi $\frac{1}{p}$ -Hölder
(quindi ho equicontinuità $\leadsto$ controllo le oscillazioni)
- Dalla prima ho un controllo sulle funzioni in almeno un p.to

$$\int_a^b |u_n(x)|^p dx \leq M^p$$

Quindi per il teo. della media integrale

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in (a, b) \text{ t.c. } |u_n(x_n)|^p \leq \frac{M^p}{b-a}$$

$$\text{da cui } |u_n(x_n)| \leq M,$$

- Mettendo insieme limitatezza in un pto + controllo della costante di Hölder deduco una limitatezza globale

$$|u_n(x)| \leq \underbrace{|u_n(x_n)|}_{\leq M_1} + \underbrace{|u_n(x) - u_n(x_n)|}_{\leq M |x - x_n|^{1/q}} \leq M(b-a)^{1/q}$$

Conseguenza: ho le ipotesi di Ascoli - Arzelà.

Quindi: se $u_n \rightarrow u$ in L^p
 $\dot{u}_n \rightarrow v$ in L^p

allora

$u_{n_k} \rightarrow u_{\infty}$ pure uniformemente

Per ragioni quasi ovvie vale che $u_{\infty} = u$.

Per ragioni legg. meno ovvie (Lemma della sotto-sotto) non solo una s.succ., ma tutta la succ. u_n tende ad u uniform.

Questo è un altro modo di concludere che il limite u è continuo (limite unif. di continue) e vale

$$|u_n(y) - u_n(x)| \leq \|\dot{u}_n\|_{L^p} |y-x|^{1/q}$$

↓ ↓ unif.

$$|u(y) - u(x)| \leq \underbrace{\|\dot{u}\|_{L^p}}_{=0} |y-x|^{1/q}.$$

Altro modo di def. i Sobolev

Una funzione sta in $W^{1,p}$ se il rapporto incrementale

$$R_h(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

converge in L^p a qualcosa (il q.c. è la derivata debole).