

SPAZI DI SOBOLEV

→ Definizione W

→ Definizione H

Def. (W)

Sia $p \geq 1$ un numero reale. Sia $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Si dice che $u \in W^{1,p}(a, b)$ e che v è la sua derivata debole se

$$u \in L^p(a, b), \quad v \in L^p(a, b)$$

e vale "la formula di integrazione per parti"

$$\int_a^b u(x) \dot{\varphi}(x) dx = - \int_a^b v(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(a, b)$$

In questo caso si scrive $v = u'$.

Fatto 1

La derivata debole, se esiste, è unica.

Dim

Supponiamo che v_1 e v_2 vadano bene. Allora

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x) \dot{\varphi}(x) dx &= - \int_a^b v_1(x) \varphi(x) dx \\ &= - \int_a^b v_2(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

$$\leadsto \int_a^b (v_1(x) - v_2(x)) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(a, b)$$

$\nexists$ LCV (variante Sobolev) $\Rightarrow v_1(x) \equiv v_2(x)$ (coincidono a meno di un insieme di misura nulla)

Fatto 2 $W^{1,p}([a,b])$ è uno spazio vettoriale e l'applic.

$$W^{1,p}([a,b]) \ni u \rightsquigarrow u' \in L^p([a,b])$$

è lineare.

Dim. Esercizio immediato.

Fatto 3 Consistenza con il caso classico

3.1 Se $u \in C^1([a,b])$, allora $u \in W^{1,p}([a,b])$ e la derivata debole è proprio la derivata vera.

Dim. Formula di integrazione per parti

3.2 Se $u \in L^p([a,b])$ e $v \in C^0([a,b])$, allora davvero $u \in C^1$ e $v = u'$ (derivata vera).

Dim. Sia $U(x)$ la primitiva di $v(x)$. Per la formula classica di int. per parti

$$\int_a^b U(x) \dot{\varphi}(x) dx = - \int_a^b v(x) \varphi(x) dx = \int_a^b u(x) \dot{\varphi}(x) dx$$

$\uparrow$ classica $\uparrow$ v è deriv. debole di u

$$\rightsquigarrow \int_a^b (U(x) - u(x)) \dot{\varphi}(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty([a,b])$$

$$\rightsquigarrow U(x) - u(x) = \text{costante} \rightsquigarrow u(x) = \underbrace{U(x)}_{\in C^1} + c$$

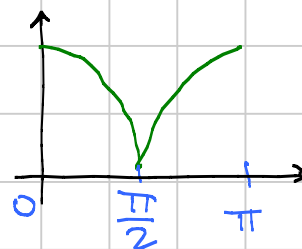
Fatto 4 Esistono funzioni $u \in W^{1,p}((a,b)) \setminus C^1((a,b))$.

Ad esempio

$$u(x) = |\cos x| \in W^{1,p}((0,\pi)) \quad \forall p \geq 1$$

e la sua deriv. debole è

$$v(x) = \begin{cases} -\sin x & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ +\sin x & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$



Dim. Data una qualunque $\varphi \in C_c^\infty((0,\pi))$ vale

$$\begin{aligned} \int_0^\pi u(x) \dot{\varphi}(x) dx &= \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \dot{\varphi}(x) dx + \int_{\pi/2}^\pi (-\cos x) \cdot \dot{\varphi}(x) dx \\ \text{(per parti)} \quad &= [\cos x \cdot \varphi(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\sin x) \varphi(x) dx \\ &\quad + [-\cos x \cdot \varphi(x)]_{\pi/2}^\pi - \int_{\pi/2}^\pi \sin x \cdot \varphi(x) dx \\ &= \underbrace{\cos \frac{\pi}{2} \cdot \varphi(\frac{\pi}{2}) - \cos(\frac{\pi}{2}) \cdot \varphi(\frac{\pi}{2})}_{\text{se ne avrebbero anche se fosse } u(x) = |\cos x| + 5} \\ &\quad - \int_0^\pi v(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Oss. In modo del tutto analogo posso verificare che tutte le funzioni continue che sono C^1 a tratti sono in $W^{1,p}((a,b))$ per ogni $p \geq 1$ (reale). Ce ne sarebbe anche altre.

Fatto 5 Esistono $u \in L^p((a,b)) \setminus W^{1,p}((a,b))$, ad esempio

$$H(x) := \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

Dim Supponiamo che $H \in W^{1,p}((-1,1))$ e sia v la sua derivata debole. Allora

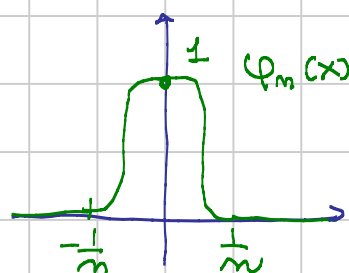
$$\begin{aligned} -\int_{-1}^1 v(x) \varphi(x) dx &= \int_{-1}^1 H(x) \dot{\varphi}(x) dx \\ &= \int_0^1 \dot{\varphi}(x) dx = \varphi(1) - \varphi(0) = -\varphi(0) \end{aligned}$$

Quindi dovrebbe essere vero che

$$\int_{-1}^1 v(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((-1,1))$$

$$\int_{-1}^1 v(x) \varphi_n(x) dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

↓
puntuale e dominata da $|v(x)|$



Quindi LHS $\rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.
— 0 — 0 —

Def. (H) Sia $p \geq 1$ un reale e sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Siano

$$u \in L^p(a,b) \quad v \in L^p(a,b)$$

Dico che $u \in H^{1,p}(a,b)$ e v è la sua deriv. debole se esiste una successione

$$\{u_n\} \subseteq C^1(a,b) \quad (\text{o anche } C^\infty(a,b)) \quad (\text{senza supp. compatto})$$

tale che

- $u_n \rightarrow u$ in $L^p(a,b)$
- $u_n' \rightarrow v$ in $L^p(a,b)$.

Variazione della def. (H). Consideriamo lo spazio $C^1(a,b)$ munito della metrica

$$\text{dist}(f,g) := \|f-g\|_{L^p(a,b)} + \|f'-g'\|_{L^p(a,b)}$$

Allora posso definire $H^{1,p}(a,b)$ come il completamento di $C^1(a,b)$ rispetto a questa distanza.

Idem partendo da $C^\infty(a,b)$.

— o — o —

Fatto 1 Unicità der. debole $\leadsto$ non sembra banale

Fatto 2 Linearità $\leadsto$ facile esercizio

Fatto 3 **3.1** $\leadsto$ Banale se uso approx C^1 , meno se lo voglio C^∞ .

3.2 $\leadsto$ non sembra evidente

Fatto 4 $u(x) = |\cos x| \in H^{1,p}((0,\pi))$

Dim. Basta porre $u_n(x) := \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{n}} \in C^\infty((0,\pi))$

$u_n(x) \rightarrow |\cos x|$ puntualmente con dominazione, quindi in $L^p((0,\pi))$ per ogni $p \geq 1$

$$u'_n(x) = \frac{2 \cos x (-\sin x)}{2 \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{n}}} \rightarrow \frac{\cos x}{|\cos x|} (-\sin x)$$

puntualmente per $x \in (0,\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$
con dominazione, quindi in ogni L^p .

Fatto 5 $u(x) \notin H^{1,p}((-1,1)) \leadsto$ non evidente.

Teorema

$$H \subseteq W$$

Dim

Siano u_n le approx. come nella def. H.

Sia $v \in C_c^\infty(a,b)$.

Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\int_a^b u_n(x) \dot{\varphi}(x) dx = - \int_a^b \dot{u}_n(x) \varphi(x) dx \quad (\text{int. per parti classica})$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow u_n \rightarrow u \text{ in } L^p & & \downarrow \dot{u}_n \rightarrow \dot{u} \text{ in } L^p \\ \int_a^b u(x) \dot{\varphi}(x) dx = - \int_a^b v(x) \varphi(x) dx \end{array}$$

$\leadsto u \in W^{1,p}(a,b)$ e v è la derivata debole.

Oss. Questo sistema tutti i p.ti finora poco chiari.

Teorema

(Caso $p=2$) Sia $\{u_n\} \subseteq W^{1,2}(a,b)$

Siano $\dot{u}_n$ le rispettive deriv. deboli.

Supponiamo che

$$u_n \rightarrow u_\infty \quad (\text{debole } L^2(a,b))$$

$$\dot{u}_n \rightarrow v_\infty \quad (\quad " \quad)$$

Allora $u_\infty \in W^{1,2}(a,b)$ e $v_\infty = \dot{u}_\infty$.

Dim

$$\begin{array}{ccc} \int_a^b u_n(x) \dot{\varphi}(x) dx = - \int_a^b \dot{u}_n(x) \varphi(x) dx \\ \downarrow (\text{bastano le deb. } L^2) & & \downarrow \\ \int_a^b u_\infty(x) \dot{\varphi}(x) dx = - \int_a^b v_\infty(x) \varphi(x) dx \\ \text{--- o --- o ---} \end{array}$$