

Tre teoremi di convergenza (la misura è quella di Lebesgue)

Teorema 1 (BEPPLO LEVI) Sia $f_n: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo che

(i) $f_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) f_n misurabili secondo Lebesgue

(iii) $f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \quad \forall x \in (a,b) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Allora

$$\int_a^b \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \right) dx = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_a^b f_n(x) dx$$

teo. convergenza
monotona

Teorema 2 (LEMMA DI FATOU) Sia $f_n: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo che

(i) $f_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) f_n misurabili secondo Lebesgue.

Allora

$$\int_a^b \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Teorema 3 (teo. CONVERGENZA DOMINATA di Lebesgue)

Sia $f_n: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

(i) f_n misurabili secondo Lebesgue

(ii) $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x) \quad \forall x \in (a,b)$ (conv. puntuale)

(iii) esiste $g: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile t.c. $|f_n(x)| \leq g(x)$

$\forall x \in (a,b) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

DOMINAZIONE

Allora

$$\int_a^b f_\infty(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

SPAZI DI LEBESGUE Per ogni $p \geq 1$ si pone

$$L^p(a,b) := \{f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ misur. t.c. } \int_a^b |f(x)|^p dx < +\infty\}$$

Proprietà Fissato $p \geq 1$ vale che

- $L^p(a,b)$ è uno sp. vettoriale
- La quantità

$$\|f\|_{L^p(a,b)} := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

è una norma

- Rispetto alla norma lo spazio L^p diventa metrico COMPLETO, quindi un Banach. (Qui servono teo. di passaggio al limite)
- Nel caso $p=2$ è un Hilbert con prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x) dx$$

Disuguaglianza di Hölder

Versione base Se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($p \geq 1, q \geq 1$), $f \in L^p(a,b)$
 $g \in L^q(a,b)$

Allora $f \cdot g \in L^1(a,b)$ e vale

$$\int_a^b f(x)g(x) dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

Idea: posso assumere che gli integrali al RHS siano 1. Uso disug di Young (che segue dalla convessità)
 $ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$ con $f(x) = a$ e $g(x) = b$ e ho finito.

Versione a più specie $\sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} = 1$ $f_i \in L^{p_i}$
Allora

$$\|f_1 \cdots f_k\|_{L^1} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}}$$

Young a k termini

Altra versione $\sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} = \frac{1}{r}$ $f_i \in L^{p_i}$

Allora

$$\left\| \prod_{i=1}^k f_i \right\|_{L^r} \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{L^{p_i}}$$

— o — o —

Basta considerare $f_1^2, \dots, f_k^2$

Teorema di approssimazione Sia $p \geq 1$ e sia $f \in L^p((a,b))$.
Allora esiste una succ.

$$\{f_n\} \subseteq C^0((a,b)) \quad \text{ma anche } \{f_n\} \subseteq C_c^\infty((a,b))$$

tale che

$$(1) f_n \rightarrow f \text{ in } L^p((a,b))$$

$$(2) f_n \rightarrow f \text{ in maniera puntuale dominata in } L^p$$

— o — o —

Teorema (FLCV, versione Lebesgue)

Sia $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $L^2((a,b))$.

Supponiamo che

$$\int_a^b f(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty((a,b)).$$

Allora $f(x) = 0$ per quasi ogni $x \in (a,b)$.

Dim. Considero una successione $\{v_n\} \subseteq C_c^\infty((a,b))$
che approssima $f(x)$ come detto sopra.

Allora

$$\int_a^b f(x) \cdot u_m(x) dx = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$\int_a^b f(x) \cdot f(x) dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

Per passare al limite senza convergenza dominata.
Sappiamo che

$$u_m(x) \rightarrow f(x) \text{ puntualmente}$$

$$|u_m(x)| \leq g(x) \text{ con } g(x) \text{ in } L^2$$

Allora $|f(x) u_m(x)| \leq |f(x)| \cdot |g(x)| \in L^1$
(per Hölder)

Quindi possiamo passare al limite.

— o — o —

FLCV rivisitato: L'ipotesi è equiv. a dire che nello sp. di Hilbert L^2 la funzione f è ortogonale ad un s.sp. vett. DENS0.

— o — o —

Fatto utile $L^2(a,b)$, così come anche gli altri L^p , è SEPARABILE

Dim Un denso numerabile sono le comb. lin. finite a coeff. in $\mathbb{Q}$ di funzioni caratteristiche di intervalli con estremi in $\mathbb{Q}$.

Corollario $L^2(a,b)$ ammette (infinita) basi Hilbertiane

Ad esempio, in $L^2(0,\pi)$ una base Hilbertiana è

$$f_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(mx)$$

↑ serve ad avere norma 1 in L^2

Servono tre verifiche

- $\|f_n\| = 1$ (banale aggiustando la costante)
- $\langle f_i, f_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ (facile esercizio di Analisi 1)
- generano un denso: segue (e non è banale)
 - o dai teoremi appositi sulle serie di Fourier
 - o da Stone - Weierstrass applicato ai pol. trigonometrici
 - o dal teorema spettrale applicato all'inverso della derivata seconda.

Conseguenza La successione $f_n(x) = \sin(nx)$ tende debolmente a 0 in $L^2((0, \pi))$

Dimostrazione con le mani: dovrei dimostrare che

$$\int_0^\pi \sin(nx) f(x) dx \rightarrow 0 \quad \forall f \in L^2((a, b))$$

Basta che lo dimostro $\forall f \in W$ con $\text{Span}(W)$ denso in L^2 .

Prendo come W le caratteristiche di intervalli:

$$\int_a^b \sin(nx) dx \rightarrow 0 \quad \text{se } (a, b) \subseteq (0, \pi)$$

$$\left[-\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_a^b \rightarrow 0.$$

— o — o —

Domanda: cosa succede se $f_n(x) = \sqrt{n} \sin(nx)$?

Questa non può convergere debole perché $\|f_n\|$ non è limitata.

— o — o —