

Setting: H spazio di Hilbert (separabile)

$$u_n \rightarrow u_\infty \text{ (forte)} \quad \text{se} \quad \|u_n - u_\infty\| \rightarrow 0$$

$$u_n \rightarrow u_\infty \text{ (debole)} \quad \text{se} \quad \langle u_n, w \rangle \rightarrow \langle u_\infty, w \rangle \quad \forall w \in H$$

Domanda: sotto quali ipotesi $\langle u_n, w_n \rangle \rightarrow \langle u_\infty, w_\infty \rangle$?

Risposta 1: $u_n \rightarrow u_\infty$ e $w_n \rightarrow w_\infty$ non basta

Esempio

$$u_n = w_n = e_n \leftarrow \text{base Hilbertiana}$$

$$\langle u_n, w_n \rangle = 1$$

$$u_\infty = w_\infty = 0$$

Risposta 2 Se $u_n \rightarrow u_\infty$ e $w_n \rightarrow w_\infty$, allora Ok
(Una debole e una forte bastano)

Teorema

Supponiamo che

$$(i) \quad u_n \rightarrow u_\infty$$

$$(ii) \quad w_n \rightarrow w_\infty$$

$$(iii) \quad \{u_n\} \text{ limitata, cioè } \exists M \in \mathbb{R}: \|u_n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora

$$\langle u_n, w_n \rangle \rightarrow \langle u_\infty, w_\infty \rangle$$

Dim. $|\langle u_n, w_n \rangle - \langle u_\infty, w_\infty \rangle| \leq |\langle u_n, w_n \rangle - \langle u_n, w_\infty \rangle| + |\langle u_n, w_\infty \rangle - \langle u_\infty, w_\infty \rangle|$ ①

②

$$\textcircled{1} = |\langle u_n, w_n - w_\infty \rangle| \leq \|u_n\| \cdot \|w_n - w_\infty\| \leq M \cdot \|w_n - w_\infty\|$$

$\uparrow$ Hp (iii) $\quad \downarrow$ 0 (Hp ii)

$$\textcircled{2} = |\langle u_n - u_\infty, w_\infty \rangle| \rightarrow 0 \text{ per Hp (i)}$$

— 0 — 0 —

Domanda: quando verifico che $u_n \rightarrow u_\infty$, posso limitarmi a verificare

$$\langle u_n, w \rangle \rightarrow \langle u_\infty, w \rangle \quad \forall w \in W \subseteq H$$

Proposizione Sia $\{u_n\} \subseteq H$ una succ. Diniata
Sia $W \subseteq H$ un sottoinsieme tale che

$$\overline{\text{Span}(W)} \overset{\text{rispetto alla forte}}{=} H \quad (\text{span denso})$$

Supponiamo che $\langle u_n, w \rangle \rightarrow \langle u_\infty, w \rangle \quad \forall w \in W. \quad (*)$
Allora

$$u_n \rightarrow u_\infty$$

Dim. (vedi passi dim. compattezza debole delle palle)

Se vale $(*)$, allora vale la stessa $\forall w \in \text{Span}(W)$. Quindi WLOG posso supporre che W sia s.sp. vettoriale.

Resta da dim.: se vale $(*) \quad \forall w \in W$, allora vale $(*) \quad \forall w \in \overline{W}$.

Sia $w \in \overline{W}$. Devo dim. che $\forall \varepsilon > 0$ vale

$$|\langle u_n, w \rangle - \langle u_\infty, w \rangle| \leq \varepsilon \quad \text{definitivamente in } n.$$

Scelgo $w_\varepsilon \in W$ t.c. $\|w - w_\varepsilon\| \leq \frac{1}{3} \frac{\varepsilon}{M} \leftarrow \text{Diniatazione su } \|u_n\|$

Osservo che

$$|\langle u_n, w \rangle - \langle u_\infty, w \rangle| \leq |\langle u_n, w \rangle - \langle u_n, w_\varepsilon \rangle| + \quad (1)$$

$$+ |\langle u_n, w_\varepsilon \rangle - \langle u_\infty, w_\varepsilon \rangle| \quad (2)$$

$$+ |\langle u_\infty, w_\varepsilon \rangle - \langle u_\infty, w \rangle| \quad (3)$$

$$\textcircled{1} = |\langle u_n, w - w_\varepsilon \rangle| \leq \|u_n\| \cdot \|w - w_\varepsilon\| = \frac{1}{3} \varepsilon$$

$$\leq M \leq \frac{1}{3} \frac{\varepsilon}{M}$$

[aggiunto dopo video: non serve che $\|u_\infty\| \leq M$, basta prendere $\|w_\varepsilon - w\| \leq \frac{1}{3} \frac{\varepsilon}{\|u\|_\infty}$]

$$\textcircled{3} \leq \|u_\infty\| \cdot \|w_\varepsilon - w\| \leq \frac{1}{3} \varepsilon$$

$$\leq M$$

$$\textcircled{2} = |\langle u_n - u_\infty, w_\varepsilon \rangle| \leq \frac{1}{3} \varepsilon \quad \text{per } n \text{ abbastanza grande}$$

perché $w_\varepsilon \in W$.

Perché $\|u_\infty\| \leq M$? Motivo complicato: per compattezza debole delle palle + sci della norma.

(Se sapessi che $u_\infty \in W$ potrei scrivere $\langle u_n, u_\infty \rangle \rightarrow \langle u_\infty, u_\infty \rangle$
 $\leq M \cdot \|u_\infty\| \quad \|u_\infty\|^2$)

Altrimenti forse funziona un discorso di approssimazione:

Prendo $u_\varepsilon \in W$ t.c. $\|u_\infty - u_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ e scrivo

$$\langle u_n, u_\infty \rangle = \langle u_n, u_\infty - u_\varepsilon \rangle + \langle u_n, u_\varepsilon \rangle$$

$$\leq M \varepsilon \quad \downarrow$$

$$\langle u_\infty, u_\varepsilon \rangle$$

$$\langle u_\infty, u_\infty \rangle = \langle u_\infty, u_\varepsilon \rangle + \langle u_\infty, u_\infty - u_\varepsilon \rangle$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle u_n, u_\varepsilon \rangle + \langle u_\infty, u_\infty - u_\varepsilon \rangle$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle u_n, u_\infty \rangle - \langle u_n, u_\infty - u_\varepsilon \rangle + \langle u_\infty, u_\infty - u_\varepsilon \rangle$$

$$\leq M \cdot \|u_\infty\|$$

$$\leq M \cdot \|u_\infty\| + M \varepsilon + \|u_\infty\| \cdot \varepsilon$$

Quindi $\forall \varepsilon > 0$ vale $\|u_\infty\|^2 \leq M \|u_\infty\| + M \varepsilon + \|u_\infty\| \varepsilon$

↑ Dimostra che $\|u_\infty\| \leq M$ senza passare dal teorema.

— 0 — 0 —

Corollario La convergenza debole di una successione LIMITATA basta testarla su una base Hilbertiana, cioè

$$\langle u_m, e_k \rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \langle u_\infty, e_k \rangle \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Dim. Uso $W = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Oss. Sarebbe che sia limitata

Esempio Pseudouno $u_m = m e_m$ (o anche $m! e_m$)

È chiaro che $\langle u_m, e_k \rangle = 0$ per ogni $m \geq k$, quindi tutte le componenti tendono a 0, ma $u_m \not\rightarrow 0$.

Basta prendere

$$w := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e_k \quad \text{così} \quad \begin{aligned} \langle u_m, w \rangle &= 1 \\ \langle 0, w \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Ben definito perché $\sum \frac{1}{k^2}$ converge.

Conseguenza La conv. delle componenti garantisce la conv. debole se e solo se già che la succ. è limitata.

Teorema (Vero, ma non servirà mai nel corso)

Se $u_m \rightarrow u_\infty$, allora u_m è limitata.

Dim. BAIRE POINT Idea della dim.

Passo 1 Pongo $H_k := \{w \in H : |\langle u_m, w \rangle| \leq k \quad \forall m \in \mathbb{N}\}$

È facile che H_k è chiuso e

$$H = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_k \quad (\langle u_m, w \rangle \text{ è conv., dunque limit.})$$

Passo 2 (Baixé) $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\text{Int}(H_{k_0}) \neq \emptyset$, diciamo

$$H_{k_0} \supseteq B_{r_0}(w_0)$$

Passo 3 $\exists k_1 \in \mathbb{N}$ t.c. $H_{k_1} \supseteq B_{r_0}(0)$

Prendo v con $\|v\| < r_0$ e osservo che

$$|\langle v_m, v \rangle| \leq \underbrace{|\langle v_m, w_0 \rangle|}_{\substack{\text{limitato perché} \\ \text{succ. conv.} \\ \text{e la limitazione} \\ \text{non dipende da } v}} + \underbrace{|\langle v_m, w_0 + v \rangle|}_{\substack{\leq k_0 \\ \text{perché } w_0 + v \in B_{r_0}(w_0)}}$$

Passo 4 $\exists k_2 \in \mathbb{N}$ t.c. $H_{k_2} \supseteq B_1(0)$

(Quotetia dal caso precedente)

Passo 5 Sappiamo che $|\langle v_m, v \rangle| \leq k_2 \quad \forall v \in B_1(0)$.

Ora uso

$$v := \frac{v_m}{\|v_m\|} \quad \leadsto \quad \|v_m\| \leq k_2.$$

— 0 — 0 —