

Convergenza forte e debole negli Hilbert

Def. Sia H un Hilbert. Diciamo che

$$x_n \rightarrow x_\infty \quad (\text{conv. forte})$$

se

$$\|x_n - x_\infty\| \rightarrow 0.$$

Prop. La norma è continua risp. alla conv. forte, cioè

$$x_n \rightarrow x_\infty \quad \Rightarrow \quad \|x_n\| \rightarrow \|x_\infty\|$$

Dim Conseguenza della triangolare

$$|\|x_n\| - \|x_\infty\|| \leq \|x_n - x_\infty\|$$

Pessima notizia Se H ha dimensione infinita, allora le palle chiuse non sono compatte.

Dim. Supponendo che esista una base Hilbertiana $\{e_n\}$, ovviamente infinita, osserviamo che $\{e_n\}$ è una succ. di vettori contenuti nella palla di centro 0 e raggio 1 e non ammette s.succ. conv. Infatti

$$\|e_i - e_j\| = \sqrt{2} \quad \text{se } i \neq j$$

e quindi nessuna sottosucc. può essere di Cauchy

— 0 — 0 —

Troppo pochi compatti $\leadsto$ cambiamo la nozione di conv.

Def. Sia H un Hilbert. Diciamo che

$$x_n \longrightarrow x_\infty \quad (\text{conv. debole})$$

se

$$\boxed{\langle u, x_n \rangle \longrightarrow \langle u, x_\infty \rangle \quad \forall u \in H}$$

↑
limite di numeri

Fatto semplice 1 Se $x_n \longrightarrow x_\infty$ e $y_n \longrightarrow y_\infty$, allora

$$x_n + y_n \longrightarrow x_\infty + y_\infty$$

$$\lambda x_n \longrightarrow \lambda x_\infty$$

Dim. nuovo che esercizio

Fatto semplice 2 Se $x_n \longrightarrow x_\infty$, allora $x_n \longrightarrow x_\infty$

Dim. $|\langle x_n, u \rangle - \langle x_\infty, u \rangle| = |\langle x_n - x_\infty, u \rangle|$

$$\leq \|x_n - x_\infty\| \cdot \|u\|$$

↓ per ipotesi

Fatto semplice 3 Se H ha dimensione infinita, allora esistono succ. che conv. deb. ma non fortemente.

Esempio: sia $\{e_n\}$ una base Hilbertiana. Dico che

$$e_n \longrightarrow 0$$

Basta verificare che $\langle e_n, u \rangle \longrightarrow 0$ per ogni $u \in H$
" u_n

e $u_n \rightarrow 0$ per cond. nec. sulla serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < +\infty$

Fatto semplice 4 Se $x_n \rightarrow x_\infty$, allora le componenti di x_n rispetto ad una base Hilbertiana convergono alle corrispondenti componenti di x_∞

$$(x_n)_k = \langle x_n, e_k \rangle \rightarrow \langle x_\infty, e_k \rangle = (x_\infty)_k$$

Notizia in apparenza brutta Se $x_n \rightarrow x_\infty$, non è detto che $\|x_n\| \rightarrow \|x_\infty\|$
(la norma non è deb. cont.)

Esempio: $e_n \rightarrow 0$, ma $\|e_n\| = 1 \not\rightarrow 0$.

Teorema (La norma è SCI) Se $x_n \rightarrow x_\infty$, allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \geq \|x_\infty\|$$

Dim.

$$\|x_n\|^2 = \|(x_n - x_\infty) + x_\infty\|^2$$

$$= \|x_n - x_\infty\|^2 + \|x_\infty\|^2 + 2\langle x_n - x_\infty, x_\infty \rangle$$

$$\geq \|x_\infty\|^2 + 2\langle x_n - x_\infty, x_\infty \rangle$$

↳ per def. di conv. debole

$$\liminf \|x_n\|^2 \geq \liminf (\|x_\infty\|^2 + 2\langle x_n - x_\infty, x_\infty \rangle)$$

$$= \|x_\infty\|^2$$

— 0 — 0 —

Achtung!

$$\|x_n\|^2 = \langle x_n, e_1 \rangle^2 + \langle x_n, e_2 \rangle^2 + \dots + \langle x_n, e_k \rangle^2 + \dots$$

↓

$$\langle x_\infty, e_1 \rangle^2 + \langle x_\infty, e_2 \rangle^2 + \dots + \langle x_\infty, e_k \rangle^2 + \dots$$

$$= \|x_\infty\|^2$$

NO! Non si scambiano limiti e serie.

Buona notizia In un Hilbert (separabile) le palle chiuse sono debolmente compatte, cioè
 data una succ. $\{v_m\} \subseteq H$ t.c. $\|v_m\|^2 \leq M$
 allora esiste n_k di interi crescente ed
 esiste $u_\infty \in H$ t.c.

$$v_{n_k} \longrightarrow u_\infty$$

Dim. **Passo 1** Considero una base Hilbertiana $\{e_k\}$.
 Considero

$\langle v_m, e_1 \rangle$ ~ succ. di numeri limitata $|\langle v_m, e_1 \rangle| \leq \|v_m\| \leq M^{\frac{1}{2}}$
 Quindi ammette s.succ. conv. Siano N_1 gli indici di
 questa s.succ.

Considero $\langle v_m, e_2 \rangle$ con $m \in N_1$. È limitata, quindi
 ammette s.succ. conv. con indici $N_2 \subseteq N_1$

Considero $\langle v_m, e_3 \rangle$ e trovo $N_3 \subseteq N_2$ t.c. ...

Quindi ottengo insieme di indici $N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \dots$
 tali che indici in N_k vale

$$\langle v_m, e_k \rangle \longrightarrow d_k$$

Scegliendo una succ. n_k crescente di indici con $n_k \in N_k$
 otteniamo che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle v_{n_k}, e_i \rangle = d_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

↑↑
 Procedim.
 diagonale

Passo 2

Sospetto che il limite debole sia il vettore v_∞ che ha gli α_i come componenti.

Devo accertarmi che

$v_\infty := \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ ha senso, cioè che $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2$ converge, cioè le sue somme parziali sono limitate

$$\begin{aligned} M^2 &\geq \|v_m\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v_m, e_i \rangle^2 \\ &\geq \sum_{i=1}^k \langle v_m, e_i \rangle^2 \end{aligned}$$

Essendo una somma finita passo al limite, ottenendo

$$M^2 \geq \sum_{i=1}^k \alpha_i^2$$

Resta da dimostrare che $\langle v_{m_k}, w \rangle \rightarrow \langle v_\infty, w \rangle$ per ogni $w \in H$.

Passo 3

La relazione precedente è vera se w è comb. lineare finita degli e_k .

Sia $w = w_1 e_1 + \dots + w_m e_m$. Allora

$$\begin{aligned} \langle v_{m_k}, w \rangle &= w_1 \langle v_{m_k}, e_1 \rangle + \dots + w_m \langle v_{m_k}, e_m \rangle \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ &= w_1 \alpha_1 + \dots + w_m \alpha_m \\ &= \langle v_\infty, w \rangle \end{aligned}$$

(Sarebbe bello farlo anche quando ci sono ∞ componenti)

Passo 4] La relazione vale per un w qualunque.

Sia dato w qualunque. Fisso $\varepsilon > 0$. Esiste $w_\varepsilon \in H$ tale che

$\|w - w_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ e tale che w_ε ha solo un # finito di componenti

(basta troncare la serie che def. w)

Allora

$$|\langle U_{n_k}, w \rangle - \langle U_\infty, w \rangle| \leq |\langle U_{n_k}, w \rangle - \langle U_{n_k}, w_\varepsilon \rangle| \quad (1)$$

$$+ |\langle U_{n_k}, w_\varepsilon \rangle - \langle U_\infty, w_\varepsilon \rangle| \quad (2)$$

$$+ |\langle U_\infty, w_\varepsilon \rangle - \langle U_\infty, w \rangle| \quad (3)$$

$$(3) = |\langle U_\infty, w_\varepsilon - w \rangle| \leq \|U_\infty\| \cdot \varepsilon$$

$$(1) = |\langle U_{n_k}, w_\varepsilon - w \rangle| \leq \|U_{n_k}\| \cdot \varepsilon \leq \sqrt{M} \cdot \varepsilon$$

(2) $\rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$ per via del passo 3, quindi è $\leq \varepsilon$ se k è abbastanza grande.

In conclusione: $\forall \varepsilon > 0$ se k è abbastanza grande vale

$$|\langle U_{n_k}, w \rangle - \langle U_\infty, w \rangle| \leq \varepsilon$$

che è proprio la def. di limite.

— 0 — 0 —