

METODO DIRETTO

ma Dimostrare l'esistenza del minimo
(poi si può cercare di trovarlo)

$$F: X \rightarrow \mathbb{R}$$

$X \rightarrow$ insieme

$\rightarrow$ Spazio con nozione di convergenza $\leftarrow$

$\rightarrow$ Spazio topologico

$\rightarrow$ Spazio metrico $\leftarrow$

$\rightarrow$ Spazio di Banach

$\rightarrow$ Spazio di Hilbert $\leftarrow$

$\rightarrow \mathbb{R}^n$

Def. Dato un insieme X , una nozione di conv. in X è dichiarare le succ. conv. ed i relativi limiti.

Più formalmente, detto

$$\text{Seq}(X) = \{\text{succ. in } X\} = \{f: \mathbb{N} \rightarrow X\}$$

Una nozione di conv. è un sottoinsieme qualunque di

$$\text{Seq}(X) \times X$$

$$"x_n \rightarrow x_\infty"$$

Oss. Il sottoinsieme può essere qualunque, tipo

$\rightarrow$ succ. costanti che tendono ad altro

$\rightarrow$ succ. che hanno infiniti limiti

$\rightarrow$ succ. conv. con sottosucc. che convergono ad altro.

Def. Un sottoinsieme $K \subseteq X$ si dice compatto (per succ.) se ogni succ. a valori in K ammette una s.succ. che converge ad un elem. di K .

Def. Una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice

- continua se per ogni succ. $x_n \rightarrow x_\infty$ in X vale

$$f(x_n) \rightarrow f(x_\infty)$$
- semicontinua inferiormente se per ogni succ. $x_n \rightarrow x_\infty$ in X vale

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x_\infty).$$

Analogamente si definiscono le semicont. sup.

Teorema (Weierstrass) Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo

- (i) X sia compatto
 - (ii) f sia SCI
- } rispetto alla stessa nozione di convergenza

Allora esiste

$$\min \{ f(x) : x \in X \}.$$

Dim. Poniamo $I := \inf \{ f(x) : x \in X \}$ (esiste per forza in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$)

Per un lemma classico esiste $\{y_n\} \subseteq f(X)$ t.c.

$$y_n \rightarrow I$$

Per def. di immagine, esiste $\{x_n\} \subseteq X$ t.c. $y_n = f(x_n)$.

Poiché X è compatto esiste $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$. Allora

$$I \leq f(x_\infty) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \liminf_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = I$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 I è inf f è SCI def. di x_{n_k} perché y_n ha lim. def. di y_n

Quindi $I = f(x_\infty)$, e da questo momento sappiamo che $I \in \mathbb{R}$.

— o — o —

Oss. Le due richieste (i) e (ii) sono antitetiche, cioè

- se ho tante succ. conv., allora (i) facile e (ii) difficile
- se ho poche " " " (ii) facile e (i) difficile.

— o — o —

Def. Una $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice coerciva se

$$\exists K \subseteq X \text{ compatto t.c. } \sup \{f(x) : x \in K\} = \inf \{f(x) : x \in X\}$$

Corollario Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è coerciva e SCI, allora esiste min.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Dim.} & \inf_{x \in X} f(x) & = & \inf_{x \in K} f(x) & = & \min_{x \in K} f(x) \\ & & & \uparrow \text{coerc.} & & \uparrow \text{Weierstrass} \end{array}$$

Corollario Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è SCI ed esiste un sottolivello contenuto in un compatto e non vuoto, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \exists K \subseteq X \text{ compatto} : \emptyset \neq \{x \in X : f(x) \leq M\} \subseteq K$$

Allora esiste il minimo.

Dim. Uso corollario precedente con questo K .

Corollario (Analisi 2). Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ SCI e tale che

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Allora esiste il minimo.

Dim. Tutti i sottolivelli sono chiusi e limitati. $\square$

Fatti utili sugli spazi di Hilbert

Uno spazio di Hilbert H è

- uno spazio vettoriale
- uno spazio in cui c'è un prod. scalare definito pos.
 $\langle x, y \rangle$
- dal prodotto scalare deriva una norma

$$|x| = \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

dalla norma deriva una distanza rispetto alla quale H diventa uno spazio metrico COMPLETO.

Oss. Dalla metrica segue una nozione di conv., cioè

$$x_n \rightarrow x_\infty \text{ se e solo se } \|x_n - x_\infty\| \rightarrow 0$$

↑
come numeri.

Def. Uno sp. di Hilbert H si dice SEPARABILE se esiste $D \subseteq H$ denso e numerabile.

Def. Un sottoinsieme $\{e_n\} \subseteq H$ si dice BASE HILBERTIANA (o sistema ortonormale completo, o base ortonormale) se

$$\textcircled{1} \quad \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

$\textcircled{2}$ $\text{Span}(\{e_n\})$ è denso in H

↑ insieme comb. lineari finite.

— o — o —

Teorema Se H è un Hilbert separabile, allora ammette almeno una (ma in realtà infinite) base Hilbertiana.

Def. Dato un vettore $v \in H$ ed una base Hilbertiana $\{e_n\}$, allora

$$v_k := \langle v, e_k \rangle$$

si dice componente di v rispetto ad e_k .

Prop. Sia H un Hilbert con base Hilbertiana $\{e_n\}$. Allora le componenti hanno le seguenti proprietà

$$\textcircled{1} \quad \|v\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, e_n \rangle^2 \quad (\text{Pitagorone})$$

$$\textcircled{2} \quad \langle v, w \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} v_n w_n$$

Fatto fondamentale Se H ammette una base Hilbertiana, allora c'è una corrispondenza biunivoca tra gli elem. $v \in H$ e le successioni $\{v_n\}$ di numeri reali "quadrato sommabili", cioè tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 < +\infty$$

(Ogni Hilbert separabile è come se fosse " $\mathbb{R}^\infty$ ").

Prop. (serie negli Hilbert). Sia $\{e_n\}$ una base Hilbertiana in H , e sia $\{v_n\}$ una succ. di numeri reali. Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n e_n \text{ conv. in } H \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 \text{ conv. in } \mathbb{R}$$

Dim. Sia $S_m := v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$ (somma parziale)

vettore

$$\hat{S}_m := v_1^2 + \dots + v_n^2 \quad (\quad " \quad)$$

numeri

Dati due interi $m > n$ vale

$$\| S_m - S_n \|^2 = \| v_{n+1} e_{n+1} + \dots + v_m e_m \|^2$$

(e_i sono
ortonormali)

$$= v_{n+1}^2 + \dots + v_m^2$$

$$= \hat{S}_m - \hat{S}_n$$

Di conseguenza

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n e_n \text{ conv. in } H \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ è di Cauchy in } H$$

$$(\text{oss. pre.}) \Leftrightarrow \{\hat{S}_n\} \text{ è di Cauchy in } \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 \text{ conv. in } \mathbb{R}$$

— 0 — 0 —