

ROAD MAP METODO INDIRETTO

- ① Determinino condizioni necessarie : ELE + BC
- ② Spero di essere capace a risolvere
- ③ Spero di dim. che le soluzioni sono minimi
 - via convessità
 - via funzionale ausiliario.

In quale classe ambientare i problemi ?

$$F(u) = \int_a^b L(x, u, u') dx$$

Sia L continua in (x, s, p) .

Supponiamo di avere DBC (ma poco cambia in altri casi).

Possibili ambientazioni:

- $u \in C^1$
- $u \in C^\infty$
- $u \in C^1$ a tratti ($u \in C^0([a, b])$)
e inoltre esiste un numero finito di pti $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ t.c. u ristretta a $[x_{i-1}, x_i]$ è di classe C^1 , quindi nei pti strani esistono derivata dx e dx

Teorema L'inf di $F(u)$ nelle 3 classi è lo stesso.

La Dim è facile conseguenza di un Lemma di approssimazione del tipo

Ogni funzione in C^1 a tratti si può approssimare con una succ. fin di funzioni C^∞ , dove si intende che

$$① \quad u_n \rightarrow u \quad \text{unif. in } [a, b]$$

$$② \quad \dot{u}_n \rightarrow \dot{u} \quad \text{unif sui cpt. contenuti in } [a, b] \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

$$③ \quad \exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |\dot{u}_n(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

A questo pto passare al limite nell'integrale è un esercizio di analisi 2.

— o — o —

Esempio 1 Data $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, risolvere

$$\min \left\{ \int_a^b \dot{u}^2 + (u - f)^2 : u \in C^1([a, b]) \right\}$$

$$(ELE) \quad (L_f)' = L_s \quad \leadsto \quad \ddot{u} = u - f$$

$\leadsto$ per molte classi di f si sa risolvere esplicitamente.

In ogni caso, per ogni $f \in C^0$, esiste una famiglia a 2 parametri di soluz:

$$u(x) = a \cos R x + b \sin R x + \bar{u}(x)$$

$\swarrow$ sol. qualunque equ. non omogenea

$$\text{Nascosto (NBC)} \quad L_f = 0 \text{ al bordo} \quad \ddot{u}(a) = \ddot{u}(b) = 0$$

Facile verifica di algebra lineare: $(ELE) + (NBC)$ ha sol. unica

L'unica soluz. è un pto di min. perché

$$L(x, s, p) = p^2 + (s - f(x))^2$$

è strett. conv. nella coppia (s, p) (matrice Hessiana def. pos.)

Proprietà qualitativa della soluzione

$$\begin{aligned} \max \{u(x) : x \in [a, b]\} &\leq \max \{f(x) : x \in [a, b]\} \\ \min \{ \dots \} &\geq \min \{ \dots \} \end{aligned}$$

Dm. variazionale

Solito argomento di truncamento:
ad un minimo $u_0(x)$ non conviene andare sopra $f(x)$, perché se
trouco risparmio su u'^2 e su $(u-f)^2$.

Detto meglio: supp. esista $x_0 \in (a, b)$ t.c.

$$u(x_0) > \max f$$

Siano $x_1 < x_0 < x_2$ t.c. $u(x_1) = \max f$ e $u(x_2) = \max f$
allora

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{fuori da } [x_1, x_2] \\ \max f & \text{in } [x_1, x_2] \end{cases}$$

Allora $F(\bar{u}) < F(u)$

$\uparrow$ C^1 a tratti, quindi ammissibile

Se x_1 e x_2 in qualche modo non esistono, allora posso prendere
 $x_1 = a$ oppure $x_2 = b$.

Achtung! Prendere $\bar{u}(x) := \min \{u(x), \max f\}$ è pericoloso
perché non è detto che sia C^1 a tratti.

Dm. usando equazione

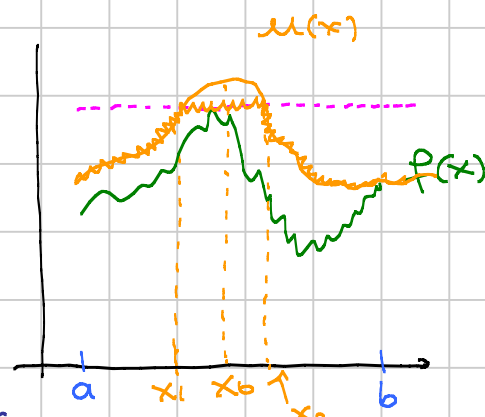
Sia x_0 il p.to di max di u .

Supponiamo che $u(x_0) > \max f$.

Già noto (ELE)

$$\underbrace{\ddot{u}(x_0)}_{\substack{\uparrow \\ \text{in un p.to} \\ \text{di max è } \leq 0}} = \underbrace{u(x_0) - f(x_0)}_{\text{ho appena supposto che sia } > 0}$$

E se x_0 è uno dei 2 p.ti di bordo?



Esempio 2

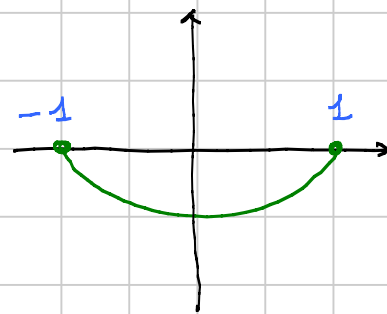
$$\min \left\{ \int_{-1}^1 \ddot{u}^4 + u : u(-1) = u(1) = 0 \right\}$$

$$(ELE) : (L\phi)' = L_s$$

$$(4\ddot{u}^3)' = 1$$

$$12\ddot{u}^2\ddot{u}' = 1$$

$$\ddot{u} = \frac{1}{12} \frac{1}{\ddot{u}^2}$$



Volevamo si risolve ponendo $\dot{u} = v$ e diventa autonoma del 2° ordine in v .

Alternativa: Lagrangiana autonoma $\leadsto$ (ELE) in forma Erdmann.

$$L_p(x, u, \dot{u}) \dot{u} = C + L(x, u, \dot{u})$$

$$4\dot{u}^3\ddot{u} = C + \dot{u}^4 + u$$

$$3\dot{u}^4 = C + u$$

$$\leadsto \dot{u}^4 = \frac{u}{3} + C \quad \leadsto \dot{u} = \pm \sqrt[4]{\frac{u}{3} + C}$$

$$\int \frac{\dot{u}}{\sqrt[4]{\frac{u}{3} + C}} = \int 1 \quad 4\left(\frac{u}{3} + C\right)^{\frac{3}{4}} = x + d$$

$$\left(\frac{u}{3} + C\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{x}{4} + d \quad \leadsto u = 3\left(\frac{x}{4} + d\right)^{\frac{4}{3}} - C$$

Cerco C e d in modo da soddisfare le DBC

$\leadsto$ verrà $d=0$ e C in modo da fare venire 0 in ± 1

$$u(x) = 3 \left| \frac{x}{4} \right|^{\frac{4}{3}} - C$$

Oss. Ho ottenuto $u(x)$ "facendo il furbo", ma posso diventare perfettamente rigoroso con le disug. finali.

Basta osservare che $\rightarrow u$ risolve (ELE) anche in una forma molto debole (1^a forma integrale)

$$\rightarrow L(x, s, p) = p^4 - s$$

è convessa nella coppia (s, p)
anche se non strettamente

Da questo segue che $u(x)$ è un pto di minimo.

Facendo bene il conto della convessità, si vede che è unico grazie alle DBC.

Oss. Il minimo in questione

$\rightarrow$ è C^1 , ma non C^2

$\rightarrow$ risolve (ELE) nella forma $(4u^3)' = 1$
ma non nella forma $12u^2 u'' = 1$

Il colpevole della non regolarità è l'annullamento di L_{pp} .

— 0 — 0 —