

TRANSVERSALITY

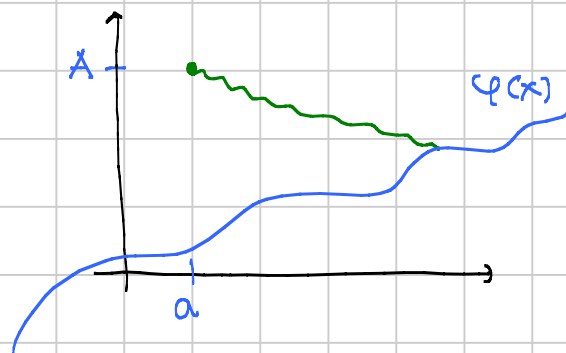
POINT-TO-CURVE PROBLEMS

Sia dato un p.to $(a, A) \in \mathbb{R}^2$

Sia data una funzione

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(u) = \int_a^b L(x, u, u') dx$$



Voglio minimizzare $F(u)$ tra tutte le coppie (u, b) tali che

$$u \in C^1([a, b]), \quad u(a) = A, \quad u(b) = \varphi(b)$$

p.to terminale sta su grafico $\varphi(x)$.

Può essere che b non sia la prima intersezione.

Obiettivo: trovare equazioni di Eulero-Lagrange in questo caso.

Si ottiene, sotto opportune ipotesi ($L \in C^2$, $\varphi \in C^1$) che, se (u_0, x_0) minimizza, allora

$$[L_p(x, u_0, u'_0)]' = L_s(x, u_0, u'_0) \quad \forall x \in (a, x_0)$$

Solita
ELE

$$u_0(a) = A$$

Solita DBC

$$L_p(x_0, u_0(x_0), u'_0(x_0)) [u'_0(x_0) - \dot{\varphi}(x_0)] = L(x_0, u_0(x_0), u'_0(x_0))$$

TRANSVERSALITY

$$u(x_0) = \varphi(x_0)$$

Oss. MOLTO brutale: se φ fosse una retta verticale, verrebbe
 " $\dot{\varphi}(x_0) = +\infty$ " da cui la classica
 NBC $L_p(x_0, u_0(x_0), u'_0(x_0)) = 0$.

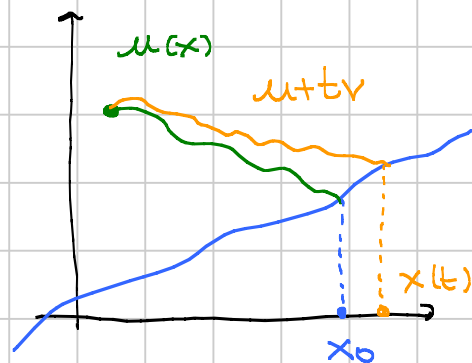
Dim.

Passo 1

Considero $u+tv$ per una opportuna $v(x)$.

Sia $x(t)$ il punto in cui $u+tv$ incontra φ , cioè

$$u(x(t)) + t v(x(t)) = \varphi(x(t))$$



Esistenza / unicità di $x(t)$ è una questione di teo. funz. impl.
Cioè considero

$$\Phi(x, t) := u(x) + t v(x) - \varphi(x)$$

osservo che $\Phi(x_0, 0) = 0$ e spero che per $t \in (-\delta, \delta)$ io possa ricavare x in funzione di t .

$$\Phi_t(x, t) = v(x)$$

$$\Phi_x(x, t) = \dot{u}(x) + t \dot{v}(x) - \dot{\varphi}(x)$$

$$\Phi_x(x_0, 0) = \dot{u}(x_0) - \dot{\varphi}(x_0).$$

Se $\dot{u}(x_0) - \dot{\varphi}(x_0) \neq 0$, allora posso ricavare. A quel punto pongo

$$\psi(t) := \int_a^{x(t)} L(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v}) dx \quad \leadsto \quad \psi'(0) = 0$$

$$\psi'(t) = \int_a^{x(t)} \dots \text{ solito } \dots + L(x(t), u(x(t))+tv(x(t)), \dots) \dot{x}(t)$$

$\uparrow$
val. dip.
da parametro

$$\psi'(0) = \int_a^{x_0} [L_s(x, u, \dot{u})v + L_p(x, u, \dot{u})\dot{v}] dx + L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0))\dot{x}(0) \\ + \int_a^{x_0} [L_s - L_p'] v + [L_p(x, u, \dot{u})v]_a^{x_0} + L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0))\dot{x}(0)$$

Dal teo. funz. cuspide ricavo

$$\dot{x}(t) = - \frac{\Phi_t(x(t), t)}{\Phi_x(x(t), t)} \quad \leadsto \quad \dot{x}(0) = - \frac{V(x_0)}{\bar{u}(x_0) - \bar{\varphi}(x_0)}$$

Sostituendo

$$\begin{aligned} \psi'(0) = \int_a^{x_0} [L_s - L_p'] V + L_p(x_0, u(x_0), \bar{u}(x_0)) V(x_0) \\ + L(x_0, u(x_0), \bar{u}(x_0)) \left(- \frac{V(x_0)}{\bar{u}(x_0) - \bar{\varphi}(x_0)} \right) \end{aligned}$$

- Uso funzione r t.c. $V(x_0) = 0$ e da FLCV deduco ELE in (a, x_0)
- Scelgo r con $V(x_0) = 1$ e ottengo

$$L_p(x_0, u(x_0), \bar{u}(x_0)) = \frac{L(x_0, u(x_0), \bar{u}(x_0))}{\bar{u}(x_0) - \bar{\varphi}(x_0)}$$

Moltiplico e ho transversality.

Passo 2 Supponiamo che $\bar{u}(x_0) = \bar{\varphi}(x_0)$

Uso come competitor φ a x_0 "allungata"

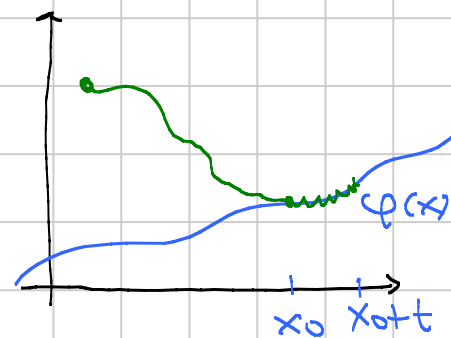
$$\psi(t) := \int_a^{x_0} L(x, u, \bar{u}) + \int_{x_0}^{x_0+t} L(x, \varphi, \bar{\varphi})$$

$$\psi'(t) = L(x_0+t, \varphi(x_0+t), \bar{\varphi}(x_0+t))$$

$$\psi'(0) = L(x_0, \varphi(x_0), \bar{\varphi}(x_0)) = L(x_0, u(x_0), \bar{u}(x_0))$$

Non posso dire che $\psi'(0) = 0$ perché ψ è definita solo per $t \geq 0$

Posso dire solo che $\psi'(0) \geq 0$ da cui $L(x_0, u(x_0), \bar{u}(x_0)) \geq 0$



Passo 3

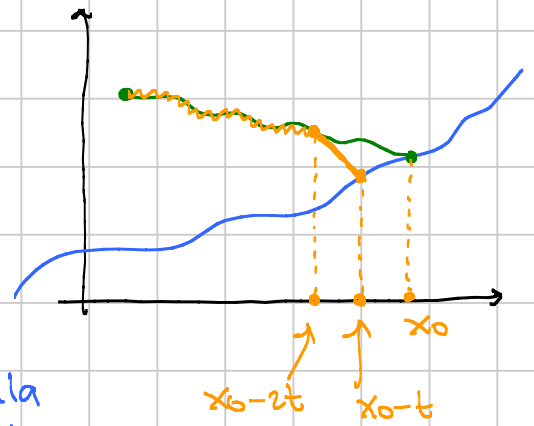
Sempre nelle ipotesi $\dot{u}(x_0) = \dot{\varphi}(x_0)$ cerco di "accorciare la u "

$\gamma(t)$ = funzionale calcolato sulla u "accorciata"

$$= \int_a^{x_0-2t} L(x, u, \dot{u}) + \int_{x_0-2t}^{x_0-t} L(x, \ell, \dot{\ell})$$

equazione della
retta di raccordo

$$= \int_a^{x_0} L(x, u, \dot{u}) - \int_{x_0-2t}^{x_0} L(x, u, \dot{u}) + \int_{x_0-2t}^{x_0-t} L(x, \ell, \dot{\ell})$$



Il primo termine è costante $\leadsto$ quando derivo sparisce.
La deriv. del 2° termine è

$$- 2 L(x_0-2t, u(x_0-2t), \dot{u}(x_0-2t))$$

Quando metto $t \rightarrow 0$ viene $- 2 L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0))$

Per derivare l'ultimo termine potrei scrivere l'eq. di ℓ (come retta passante per 2 punti) e fare i conti.

In alternativa, osservo che per la media integrale vale

$$\int_{x_0-2t}^{x_0-t} L(x, \ell(x), \dot{\ell}(x)) = t L(x(t), \ell(x(t)), \dot{\ell}(x(t)))$$

Dividendo per t e passando al limite per $t \rightarrow 0$ trovo che la deriv. del terzo termine è

$$L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0))$$

Ho usato che $x_0-2t \leq x(t) \leq x_0-t$
e $\ell(x(t)) \in [u(x_0-2t), u(x_0-t)]$

Per passare al limite

$\dot{\ell}(x(t)) \rightarrow \dot{u}(x_0)$ senza che
 $\dot{u}(x_0) = \dot{\varphi}(x_0)$.

Conclusione:

$$\psi'(t) = -L(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) \geq 0$$

↑ definita solo per $t \geq 0$.

Questo completa la dim. anche nel caso $\dot{u}(x_0) = \dot{\varphi}(x_0)$
— o — o —

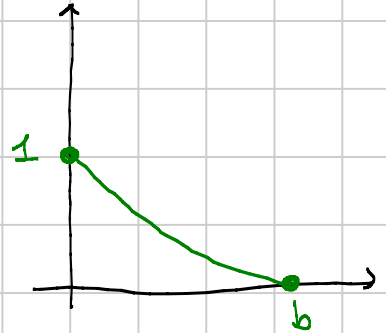
Oss. Controllare bene il passaggio $\dot{L}(x(t)) \rightarrow \dot{u}(x_0)$
(es. analisi 1).

Esempio $F(u, b) = \int_0^b (\dot{u}^2 + u^2) dx$

Prendiamo DBC $u(0) = 1$

e $\varphi(x) \equiv 0$.

Esiste il minimo?



$$(ELE) \rightsquigarrow (L_p)' = L_s \rightsquigarrow (2\dot{u})' = 2u \rightsquigarrow \ddot{u} = u$$

$$\rightsquigarrow u(x) = a \cosh x + b \sinh x$$

$$(DBC) \ u(0) = 1 \rightsquigarrow a = 1 \rightsquigarrow u(x) = \cosh x + b \sinh x$$

$$(\text{Transversality}) \quad L_p(x, u, \dot{u})(\dot{u} - \dot{\varphi}) = L(x, u, \dot{u}) \quad \text{in } x_0$$

$$\begin{aligned} 2\dot{u}(\dot{u} - 0) &= \dot{u}^2 + u^2 \\ \dot{u}^2 &= u^2 \quad \text{in } x_0 \end{aligned}$$

Nel contatto vale $u(x_0) = 0$, quindi deve essere $\dot{u}(x_0) = 0$.

La condizione diventa

$$\sinh x_0 + b \cosh x_0 = 0$$

$$\cosh x_0 + b \sinh x_0 = 0$$

$$\dot{u}(x_0) = 0$$

$$u(x_0) = 0$$

$$b = - \frac{\sinh x_0}{\cosh x_0} = - \frac{\cosh x_0}{\sinh x_0}$$

$$\rightsquigarrow \sinh^2 x_0 = \cosh^2 x_0$$

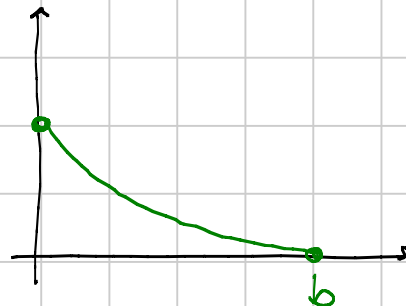
$\rightsquigarrow$ impossibile $\rightsquigarrow$ no sol. !!!

Esercizio Provare a vedere che succede con $c(x) \equiv c$ costante.

Cosa vuol dire che non c'è soluzione?

Se considero il minimo con

DBC $u(0) = 1$ e $u(b) = 0$,



questo ha soluzione. Sia $u(b)$ il minimo.

Il conto della transversality dovrebbe dire che

$u(b)$ è strett. monotona (positiva?)

e quindi in ogni caso il minimo si ottiene per $b \rightarrow 0^+$ o per $b \rightarrow +\infty$ a seconda della monotonia.

$u(b)$ sarà decrescente: calcolare $u'(b)$.

— 0 — 0 —