

Come dimostro che u è minimo di F ?

- ① via convessità
 - ② via Lemma trivial
 - ③ Calibrazioni
 - ④ Campi di Weierstrass
- } ora
- } seconda parte del corso

1 Convessità

Analisi 1 Sia $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa.

Sia $x_0 \in (c, d)$.

Allora esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0) \quad \forall x \in [c, d]$$

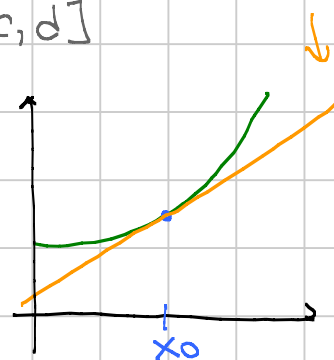
$$f(x_0) + m(x - x_0)$$

[Facile se $f \in C^2$, ma vero in generale, basta prendere

$$m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$$

↓ derivata dx e sx in x_0 :

vedi lezioni di Analisi 1]



Analisi 2 Sia $f(x, y)$ convessa, sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Allora esistono $m_1 \in \mathbb{R}$ ed $m_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) + m_1(x - x_0) + m_2(y - y_0) \quad \forall (x, y) \in \text{zona di def.}$$

[Facile se $f \in C^2$, ma vero in generale].

Uso della convessità

Consideriamo $F(u) = \int_a^b L(x, u(x), \dot{u}(x)) dx$ con DBC

Supponiamo che

(i) ci sia abbastanza regolarità ($L \in C^2$)

(ii) $u_0(x)$ sia soluzione di ELE con DBC

(iii) per ogni $x \in [a, b]$ la funzione $(s, p) \rightarrow L(x, s, p)$ è convessa (come funzione di due variabili)

Allora u_0 è p.to di min. per il pbm. con le DBC.

Dim. Prendo un qualunque altro competitor w e pongo $v(x) := w(x) - u_0(x)$.
Ossevo che $v(a) = v(b) = 0$.
Scrivo

$$F(w) = F(u_0 + v) = \int_a^b L(x, u_0 + v, \dot{u}_0 + \dot{v}) dx$$

Ora dalla convessità e regolarità di L ottengo la disug.

$$L(x, \underbrace{s+s_1}_{u_0+v}, \underbrace{p+p_1}_{\dot{u}_0+\dot{v}}) \geq L(x, \underbrace{s}_{u_0(x)}, \underbrace{p}_{\dot{u}_0(x)}) + \underbrace{L_s(x, s, p)}_{v(x)} s_1 + \underbrace{L_p(x, s, p)}_{\dot{v}(x)} p_1$$

da cui

$$\begin{aligned} F(w) &\geq \int_a^b L(x, u_0, \dot{u}_0) + \underbrace{L_s(x, u_0, \dot{u}_0) v + L_p(x, u_0, \dot{u}_0) \dot{v}}_{\substack{\text{L' integrale di questo si annulla} \\ \text{per la 1ª forma integrale di ELE}}} dx \\ &= \int_a^b L(x, u_0, \dot{u}_0) dx = F(u_0) \\ &\quad \text{--- o --- o ---} \end{aligned}$$

Oss. (1) Abbiamo in realtà usato solo che u_0 risolve la 1ª forma integrale di ELE, che richiede meno reg. su L (basta C^1)

(2) Se inoltre L è strett. convessa in (s,p) , allora la disug. di analisi 2 è stretta se $(x,y) \neq (x_0,y_0)$, da cui l'unico modo per avere uguaglianza è che v e $\dot{v}$ siano nulle, cioè $v(x) \equiv 0$.
Quindi $u_0(x)$ è l'unico p.to di min.

Esempio $F(u) = \int_0^1 (\dot{u}(x))^4 dx$

Minimizza con $u(0)=0, u(1)=5$.

$$L(x,s,p) := p^4 \rightsquigarrow [L_0(x,u,\dot{u})]' = L_5(x,u,\dot{u})$$

$$(4\dot{u}^3)' = 0$$

$$\rightsquigarrow \dot{u}^3 = \text{costante} \rightsquigarrow \dot{u} = \text{costante} \rightsquigarrow u = \text{retta}.$$

Sappiamo per l'enunciato prec. che la retta è l'unico p.to di min. Senza pensare alla convessità è meno evidente

$$\begin{aligned} F(w) &= F(u+v) = \int_0^1 (\dot{u} + \dot{v})^4 \\ &= \int_0^1 \underbrace{\dot{u}^4}_{F(u)} + \underbrace{4\dot{u}^3\dot{v}}_{=0 \text{ integrando per parti ed usando ELE}} + \underbrace{6\dot{u}^2\dot{v}^2 + 4\dot{u}\dot{v}^3 + \dot{v}^4}_{\geq 0 \text{ (vero ma non del tutto evidente)}} \end{aligned}$$

$$6\dot{u}^2\dot{v}^2 + 4\dot{u}\dot{v}^3 + \dot{v}^4 = \dot{v}^2 \underbrace{(6\dot{u}^2 + 4\dot{u}\dot{v} + \dot{v}^2)}_{\text{forma quadratica def. positiva.}}$$

② Lemma trivial Sia $\mathbb{X}$ un insieme, e siano $F: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ e $G: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni.

Supponiamo che

- (i) $F(x) \geq G(x)$ per ogni $x \in \mathbb{X}$,
- (ii) $x_0 \in \mathbb{X}$ è p.to di min. per G ,
- (iii) $F(x_0) = G(x_0)$.

Allora x_0 è p.to di min. per F .

Dim Per ogni $x \in \mathbb{X}$ vale

$$F(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(i)}}}{\geq} G(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(ii)}}}{\geq} G(x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(iii)}}}{=} F(x_0).$$

Esempio $F(u) = \int_0^2 (\dot{u}^2 - 1)^2 dx$

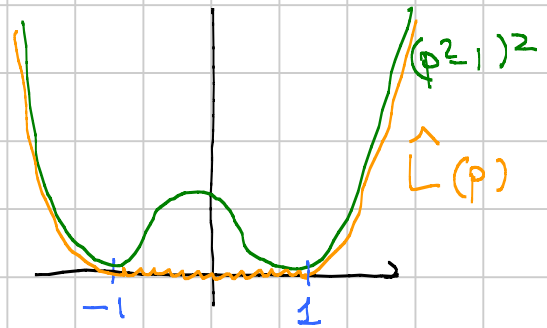
$$\mathbb{X} := \{u \in C^1([0,2]): u(0) = 1, u(2) = 7\}$$

Il guaio è che $L(x, s, p) = (p^2 - 1)^2$ non è convessa (doppio pozzo)

Congettura: la retta

$$u_0(x) := 1 + 3x$$

è l'unico p.to di min.



Idea: trovare la $G(u)$ giusta. Considero

$$\hat{L}(p) := \begin{cases} L(p) & \text{se } |p| \geq 1 \\ 0 & \text{se } |p| \leq 1 \end{cases}$$

Osservo che $\hat{L}(p)$ è una funzione convessa e pongo

$$G(u) := \int_0^2 \hat{L}(u) dx$$

Non mi resta che verificare (i) + (ii) + (iii)

(i) segue da $L \geq \hat{L}$

(ii) segue dal fatto che $\hat{L}$ è convessa, quindi u_0 è p.to di min per G

(iii) $F(u_0) = G(u_0)$ segue da $L(3) = \hat{L}(3)$.

Da questo segue che $u_0(x)$ è p.to di min. per F .

In realtà è pure unico perché u_0 è l'unico p.to di min. di G in quanto $\hat{L}$ è strett. convessa in un intorno di $p=3$, quindi l'unico p.to di contatto con la retta tangente è $p=3$.

Cosa succede con lo stesso $F(u)$ se

$$\mathbb{X} = \{u \in C^2([0,1]) : u(0)=1, u(2)=2\}$$

In questo caso $u_0(x) = 1 + \frac{1}{2}x$ non è p.to di min, anzi il min. non esiste e l'inf. è 0.



$$F(u) = \int_0^2 \left[(u^2 - 1)^2 + \left(u - 1 - \frac{1}{2}x\right)^2 \right] dx$$

L'inf. resta 0 !!!

