

EQUAZIONE DI EULERO - LAGRANGE

$$F(u) := \int_a^b L(x, u(x), \dot{u}(x)) dx$$

dove $L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 x s p

Data $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e data $v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $v(a) = v(b) = 0$ posso definire

$$\psi(t) := F(u + tv) = \int_a^b L(x, u + tv, \dot{u} + t\dot{v}) dx$$

e pone

$$\delta F(u, v) := \psi'(0)$$

Teorema (Integrali dipendenti da parametro)

Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un interv., sia $\delta > 0$, sia

$$f: [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 x t

Poniamo

$$\psi(t) := \int_a^b f(x, t) dx$$

Allora

(i) Se $f(x, t)$ è continua su $[a, b] \times (-\delta, \delta)$, allora $\psi(t)$ è cont. su $(-\delta, \delta)$.

(ii) Se $f_t(x, t)$ è cont. su $[a, b] \times (-\delta, \delta)$, allora ψ è derivab. e

$$\psi'(t) = \int_a^b f_t(x, t) dx$$

(la deriv. dell'integrale è
l'integrale della derivata)

Utilizzando il teorema otteniamo

$$\psi'(t) = \int_a^b [L_s(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v})v + L_p(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v})\dot{v}] dx$$

da cui

$$\delta F(u, v) = \psi'(0) = \int_a^b [L_s(x, u, \dot{u})v + L_p(x, u, \dot{u})\dot{v}] dx$$

Prima forma integrale della variazione prima

Ipotesi utilizzate:

- $L \in C^1$ (almeno in s e p)
- $u \in C^1$
- $v \in C^1$

Non abbiamo usato che $v(a) = v(b) = 0$.

Integrando per parti il secondo termine troviamo

$$\int_a^b L_p(x, u, \dot{u})\dot{v} dx = [L_p(x, u, \dot{u})v]_a^b - \int_a^b [L_p(x, u, \dot{u})]'v dx$$

Se $v(a) = v(b) = 0$, allora il termine di bordo si annulla e otteniamo

$$\delta F(u, v) = \int_a^b [L_s(x, u, \dot{u}) - (L_p(x, u, \dot{u}))']v dx$$

Seconda forma integrale della variazione prima

Ipotesi utilizzate:

- $L \in C^2$
- $u \in C^2$
- $v \in C^1$ e $v(a) = v(b) = 0$.

Se u è un p.to di minimo (tra quelli che hanno lo stesso dato al bordo), allora $\delta F(u, v) = 0$ per ogni $v \in \dots$

In questo caso usando FLCV ricaviamo

$$\boxed{[L_p(x, u, \dot{u})]' = L_s(x, u, \dot{u})} \quad (\text{ELE}) \text{ in forma diff.}$$

Ipotesi utilizzate:

- $L \in C^2$
- $u \in C^2$
- u pto di min./max per F .

— o — o —

Condizione di Neumann generale

$$u \in \operatorname{argmin} \{ F(u) : \underbrace{u \in C^1([a, b]) : u(a) = A} \}$$

X

Se c'è abbastanza regolarità, usando solo v con $v(a) = v(b) = 0$ ritroviamo (ELE) come sopra

A quel punto integrando per parti la 1ª formula troviamo

$$0 = \delta F(u, v) = \int_a^b \underbrace{[(L_p(x, u, \dot{u}))' - L_s(x, u, \dot{u})]}_{\equiv 0 \text{ per (ELE)}} v \, dx$$

$$+ \underbrace{[L_p(x, u, \dot{u}) v]}_a^b$$

"

$$\underbrace{L_p(b, u(b), \dot{u}(b)) v(b)}_{\substack{\downarrow \\ \text{deve essere } 0 \\ \text{per forza}}} - \underbrace{L_p(a, u(a), \dot{u}(a)) v(a)}_{\substack{\uparrow \\ \text{può essere } \neq 0 \\ \text{per forza}}}$$

$$\boxed{L_p(x, u, \dot{u}) = 0} \quad \text{nell' estremo considerato}$$

NBC generale

— o — o —

Oss. L'equazione (ELE)

$$(L_p(x, u, \dot{u}))' = L_s(x, u, \dot{u})$$

espansa diventa

$$L_{p_x}(x, u, \dot{u}) + L_{p_s}(x, u, \dot{u}) \dot{u} + L_{p\ddot{u}}(x, u, \dot{u}) \ddot{u} = L_s(x, u, \dot{u})$$

Si può scrivere in forma normale (e quindi rientra nelle teorie classiche) se

$$\underbrace{L_{p\ddot{u}}(x, u(x), \dot{u}(x))}_{\neq 0} \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

ELE in forma DBR

Scrivo la 1^a forma integrale, introduco la funzione

$$\hat{L}(x) := \int_a^x L_s(t, u(t), \dot{u}(t)) dt$$

e osservo che

$$\int_a^b L_s(x, u, \dot{u}) v = \underbrace{[\hat{L}(x) v(x)]_a^b}_0 - \int_a^b \hat{L}(x) \dot{v}(x) dx$$

↓
0 se $v(a) = v(b) = 0$

da cui

$$\delta F(u, v) = \int_a^b [-\hat{L}(x) + L_p(x, u, \dot{u})] \dot{v} dx$$

Se u è p.to di max / min, allora dal lemma DBR otteniamo che

$$L_p(x, u, \dot{u}) = c + \int_a^x L_s(t, u(s), \dot{u}(s)) ds$$

ELE-DBR
(senza meno
reg. in $L_{\text{est}} u$)

ELE in forma ERDMANN

Consideriamo il caso speciale in cui L non dipende da x

$$(L_p(u, \dot{u}))' = L_s(u, \dot{u}) \quad \text{ELE - classica}$$

Moltiplico per $\ddot{u}$

$$(L_p(u, \dot{u}))' \ddot{u} = L_s(u, \dot{u}) \ddot{u}$$

"

$$(L_p(u, \dot{u}) \ddot{u})' = L_p(u, \dot{u}) \ddot{\ddot{u}}$$

da cui

$$(L_p(u, \dot{u}) \ddot{u})' = L_s(u, \dot{u}) \ddot{u} + L_p(u, \dot{u}) \ddot{\ddot{u}} = (L(u, \dot{u}))'$$

e quindi

$$L_p(u, \dot{u}) \ddot{u} = \text{cost} + L(u, \dot{u})$$

ELE - Erdmann

↑
Eq. Diff. di ordine 1

Oss. Comunque ci sono 2 costanti per sistemare i dati al bordo,

Oss. ELE classica ed Erdmann NON sono equivalenti, ma

- u soddisfa ELE $\Rightarrow u$ soddisfa ELE - Erdmann
- u soddisfa ELE - Erdmann $\Rightarrow u$ soddisfa ELE classica nei punti $x \in [a, b]$ t.c. $\ddot{u}(x) \neq 0$.

(basta fare pass. prec. al contrario)

Piccola generalizzazione: F dipende da + derivate succ.

$$F(u) = \int_a^b L(x, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(k)}) dx$$

$$L(x, s, p_1, \dots, p_k)$$

$$\delta F(u, v) = \int_a^b L_s(\dots) v + L_{p_1}(\dots) \dot{v} + L_{p_2}(\dots) \ddot{v} + \dots + L_{p_k}(\dots) v^{(k)} dx$$

Integriamo per parti e supponendo v abbastanza nulla al bordo

$$\delta F(u, v) = \int_a^b [L_s - (L_{p_1})' + (L_{p_2})'' - \dots] v dx$$

Quindi se u è p.to di max/min dal FLCV troviamo

$$\sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \frac{d^i}{dx^i} L_{p_i}(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(k)}) = L_s(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(k)})$$

ELE per dipendenza da più derivate

Esercizio Scrivere ELE per funzionali "con 2 variabili"

$$F(u, v) := \int_a^b L(x, u(x), v(x), \dot{u}(x), \dot{v}(x)) dx$$

— o — o —