

NASCITA DELLE CONDIZIONI AL BORDO (BC)

Esempio 1 $F(u) = \int_0^1 (\dot{u}^2 + u^2) dx$

$$\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,1]) : u(0) = A, u(1) = B\}$$

$$\begin{aligned} F(u+tv) &= \int_0^1 (\dot{u} + t\dot{v})^2 + (u+tv)^2 \\ &= \int_0^1 \dot{u}^2 + 2t\dot{u}\dot{v} + t^2\dot{v}^2 + u^2 + 2tuv + t^2v^2 \end{aligned}$$

$$\delta F(u,v) = 2 \int_0^1 (\dot{u}\dot{v} + uv) \quad 1^a \text{ Forma int.}$$

$$\stackrel{\text{per parti}}{\uparrow} = 2 \int_0^1 (-\ddot{u}v + uv) dx = 2 \int_0^1 (-\ddot{u} + u)v \quad 2^a \text{ Forma Int.}$$

(niente termini di bordo perché $v(0)=v(1)=0$)

Se u è p.to di minimo, allora per FLCV

$$-\ddot{u} + u \equiv 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{u} = u \\ u(0) = A \\ u(1) = B \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(ELE)} \\ \text{DBC} \\ \text{DIRICHLET boundary cond.} \end{array}$$

$$u(x) = a \cos R x + b \sin R x$$

Esempio 2 Stesso $F(u)$, ma $\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,1]) : u(0) = A\}$
da cui

$$\mathbb{V} = \{v \in C^1([0,1]) : v(0) = 0\}$$

$$\delta F(u,v) = 2 \int_0^1 (\dot{u}\dot{v} + uv) dx \quad 1^a \text{ forma int.}$$

Integrando per parti diventa

$$\delta F(u, v) = 2 \int_0^1 (-\ddot{u} v + u \dot{v}) dx + 2 [\dot{u} v]_0^1$$

" $\dot{u}(1)v(1) - \underbrace{\dot{u}(0)v(0)}_0$

La seconda forma integrale contiene un termine di bordo

$$\delta F(u, v) = 2 \int_0^1 (-\ddot{u} + u) v dx + 2\dot{u}(1)v(1)$$

Se u è un p.to di min., allora questa è 0 per ogni $v \in V$
Procedo in 2 Fasi

- Fase 1: mi limito a considerare le v che verificano
anche $v(1) = 0$.

Otengo la stessa eq. del 1° esempio da cui deduco
che $-\ddot{u} + u \equiv 0$.

- Fase 2: l'eq. è diventata $\delta F(u, v) = \dot{u}(1)v(1) = 0$
e quindi basta scegliere $v \in V$ con $v(1) \neq 0$ per ottenere
che $\dot{u}(1) = 0$.

Alla fine ottengo

$$\begin{cases} \ddot{u} = u & \text{(ELE)} \\ u(0) = A & \text{(DBC) data all'inizio} \\ \dot{u}(1) = 0 & \text{(NBC) nata "on the road"} \\ & \text{NEUMANN BC.} \end{cases}$$

Eq. di ordine 2 con due condizioni al bordo.

Conclusione tramite disuguaglianza

Esempio 3 Stesso $F(u)$, $\mathbb{X} := \{u \in C^1([0,1])\}$

$$\leadsto \begin{cases} \ddot{u} = u \\ \dot{u}(0) = 0 \quad (\text{NBC}) \\ \dot{u}(1) = 0 \quad (\text{NBC}) \end{cases}$$

Tutto uguale fino all'integrazione per parti, poi

$$\delta F(u, v) = 2 \int_0^1 (-\ddot{u} + u) v + 2\dot{u}(1)v(1) - 2\dot{u}(0)v(0)$$

• 1^a fase: mi limito alle v t.c. $v(0) = v(1) = 0$ e ottengo $-\ddot{u} + u \equiv 0$, cioè (ELE)

• 2^a fase: prendo v t.c. $v(0) = 0$ e $v(1) \neq 0 \leadsto \dot{u}(1) = 0$
" " " $v(0) \neq 0$ e $v(1) = 0 \leadsto \dot{u}(0) = 0$.

Esempio 4 $\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,1]) : u(0) = u(1)\}$

è anche uno spazio vettoriale, quindi $V = \mathbb{X}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta F(u, v) &= \int_0^1 (-\ddot{u} + u) v + \dot{u}(1) \overbrace{v(1)}^{\text{uguali}} - \dot{u}(0) \overbrace{v(0)}^{\text{uguali}} \\ &= \int_0^1 (-\ddot{u} + u) v + (\dot{u}(1) - \dot{u}(0)) v(1) \end{aligned}$$

1^a fase : ... $\leadsto \ddot{u} = u$ (ELE)

2^a fase : prendendo v con $v(0) = v(1) \neq 0 \leadsto \dot{u}(1) = \dot{u}(0)$

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ u(0) = u(1) \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(1) \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} \ddot{u} = u \\ u(0) = u(1) \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(1) \end{cases}} \right] \begin{matrix} (\text{PBC}) \\ \uparrow \\ \text{Periodic.} \end{matrix}$$

Esempio 5

$$\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,1]) : u(1) = u(0) + 5\}$$

$$V = \{v \in C^1 \dots : v(1) = v(0)\}$$

Stesso conto di prima $\leadsto \dot{u}(1) = \dot{u}(0)$

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ u(1) = u(0) + 5 \\ \dot{u}(1) = \dot{u}(0) \end{cases} \quad (\text{NBC})$$

Esempio 6

$$\mathbb{X} = \{u \in C^1([0,1]) : u(\frac{1}{2}) = A\}$$

$$V = \{v \in \dots : v(\frac{1}{2}) = 0\}$$

$$\frac{1}{2} \delta F(u, v) = \int (-\ddot{u} + u) v + \dot{u}(1) v(1) - \dot{u}(0) v(0)$$

• 1^a fase Uso v con $v(0) = v(1) = 0$ oltre a $v(\frac{1}{2}) = 0$
La classe di queste v è abbastanza ricca da concludere che $-\ddot{u} + u \equiv 0$

• 2^a fase Ottengo (NBC) $\dot{u}(1) = \dot{u}(0) = 0$.

Formalmente ottengo

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ u(\frac{1}{2}) = A \\ \dot{u}(1) = 0 \\ \dot{u}(0) = 0 \end{cases}$$

Troppe condizioni 😞

Ma 2 casi

- Sono fortunato e c'è la soluzione $\leadsto$ con la disug. dim. che è effettivamente un minimo
- Le cond. sono incompatibili $\leadsto$ il min. non esiste
Chi è l'inf. ?

Risolvere i 2 pbm. separatamente in $[0, \frac{1}{2}]$ e $[\frac{1}{2}, 1]$

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ \dot{u}(0) = 0 \\ u(\frac{1}{2}) = A \end{cases}$$

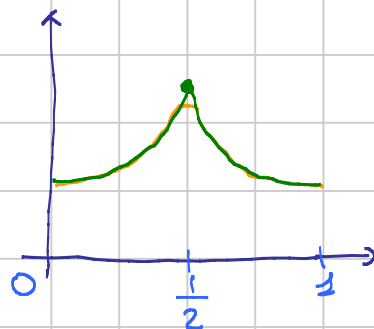
$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ \dot{u}(1) = 0 \\ u(\frac{1}{2}) = A \end{cases}$$

Accade che in $\frac{1}{2}$
non si cucollano C^1

Il valore calcolato nell'unione
è l'inf. cercato

Dici

- da una parte sono le solite disug.
- dall'altra parte basta approssimare
— o — o —



Osservazioni sparse

① $F(u) = \int \ddot{u}^2 + u^2 \rightsquigarrow (ELE)$ di ordine 4

② Se per il pbm. dell'inizio metto $\dot{u}(0) = 3$

Come sempre ottengo $\ddot{u} = u$ (ELE) e poi ho

$$0 = \dot{u}(1)v(1) - \dot{u}(0)v(0), \text{ da cui } \dot{u}(1) = \dot{u}(0) = 0$$

Morale: se $F(u)$ dipende da u e $\ddot{u}$ NON POSSO METTERE COND. su $\dot{u}$.

L'inf. è quello in cui non c'è la cond.

