

Lemma fondamentale del Calc. Var. (FLCV)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

Supponiamo che

$$\int_a^b f(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty((a, b))$$

Allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$

$\uparrow$
 $\exists [c, d] \subseteq (a, b)$ t.c.
 $v(x) = 0$ fuori da $[c, d]$

Due famiglie di dim: $\rightarrow$ per assurdo
 $\rightarrow$ per approssimazione

Dim. per assurdo Supponiamo $f \neq 0$. Allora wlog esiste $x_0 \in (a, b)$ t.c. $f(x_0) > 0$.

Per continuità

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Ora basta prendere $v \in C^\infty(\mathbb{R})$ t.c.

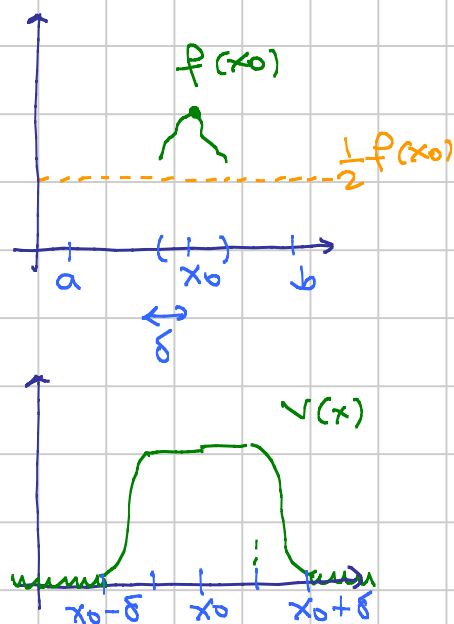
$$\bullet v(x) = 1 \text{ per ogni } x \in [x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}]$$

$$\bullet v(x) = 0 \text{ se } x \notin [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

$$\bullet v(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\int_a^b f(x) v(x) dx = \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) v(x) dx \geq \int_{x_0 - \frac{\delta}{2}}^{x_0 + \frac{\delta}{2}} f(x) v(x) dx \geq \frac{1}{2} f(x_0) \cdot \delta > 0.$$



Dim. per approssimazione

Idea chiave

$$\int_a^b f(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty \Rightarrow \int_a^b f(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in C^0$$

A questo punto basta scegliere $v(x) \equiv f(x)$

Fatto di approssimazione: per ogni $v: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua esiste una suce. di funzioni $\{v_m\} \subseteq C_c^\infty(a,b)$ tali che
(i) $\exists M$ tale che $|v_m(x)| \leq M \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a,b]$
(ii) $v_m(x) \rightarrow v(x)$ unif. sui compatti $K \subseteq (a,b)$.

Questo basta per concludere che

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b v_m(x) f(x) dx = \int_a^b v(x) f(x) dx$$

Fisso $\varepsilon > 0$ e ho conv. degli integrali su $\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}$
Gli integrali su $[a, a+\varepsilon]$ e $[b-\varepsilon, b]$ si stimano grazie all'equiunitarietà.
— o — o —

Generalizzazioni Per quali classi di funzioni V vale il Lemma, cioè

$$\int_a^b f(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in V \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

- Oss. 1 - Se l'integrale è nullo per ogni $v \in V$, allora è nullo per ogni $v \in \text{Span}(V)$
2 - Se l'integrale è nullo per ogni $v \in V$, allora è nullo sulla chiusura di V rispetto alla conv. unif. sui cpt. contenuti in $[a,b] \setminus \{\text{numero finito di punti}\}$

Risposta: Ok se la chiusura di $\text{Span}(V)$ è tutto C^0
— o — o —

LEMMA DI DU BOIS REYMOND (Lemma DBR)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

Supponiamo che

$$\int_a^b f(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(a, b) \text{ t.c. } \int_a^b v(x) dx = 0$$

Allora $f(x) \equiv \text{costante}$ in $[a, b]$.

Dim. abusiva

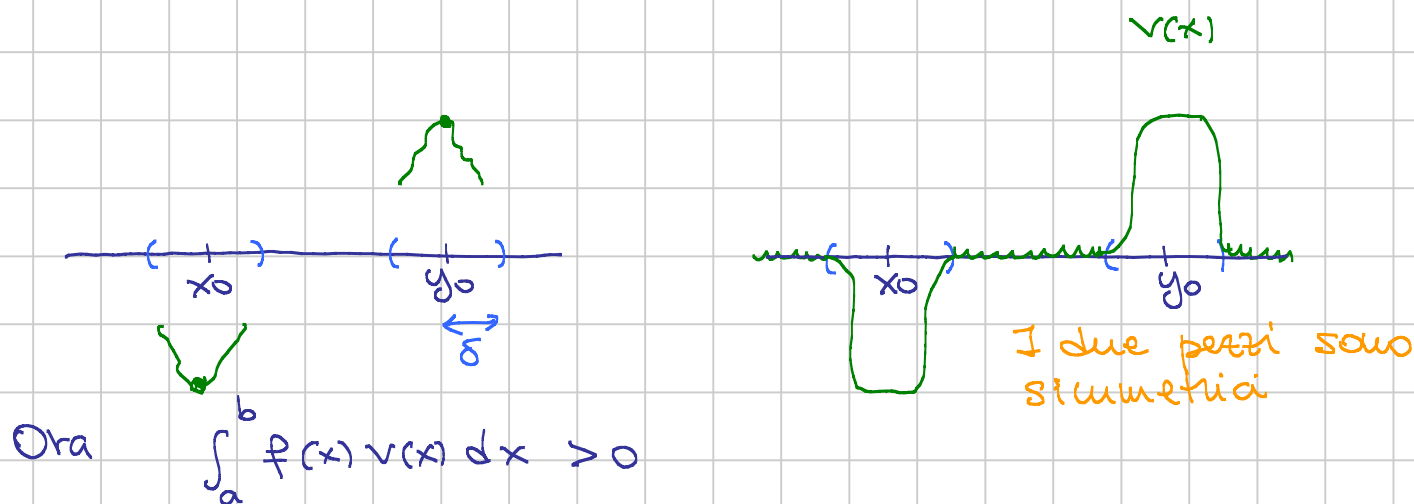
$$0 = \int_a^b f(x) v(x) dx = - \int_a^b f'(x) V(x) dx \quad \begin{array}{l} \text{(non c'è il} \\ \text{termine di bordo} \\ \text{perché } V(a) = V(b) = 0) \end{array}$$

↑
per parti

$$FLCV \Rightarrow f' \equiv 0 \Rightarrow f \text{ costante}$$

Idea essenziale Se f soddisfa l'ipotesi, allora $f(x) + c$ verifica l'ipotesi per ogni $c \in \mathbb{R}$.
(qui uso che $v(x)$ ha media nulla)

Dim. per assurdo Sia f non costante. Allora WLOG esistono $a < x_0 < y_0 < b$ t.c. $f(x_0) < f(y_0)$.
A meno di aggiungere un c opportuno posso assumere che $f(x_0) = -f(y_0)$



Dim. per approssimazione

Si dimostra che ogni funzione $v \in C^0$ a media nulla si può appross. con funzioni $v \in C_c^\infty$ a media nulla e quindi

$$\int_a^b f(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty \quad \text{con} \quad \int_a^b v(x) dx = 0$$

$\Downarrow$

"

$$\forall v \in C^0$$

"

A questo scoglio $c \in \mathbb{R}$ t.c. $\int_a^b (f(x) + c) dx = 0$

e uso $v(x) = f(x) + c$. Ottengo che $f(x) + c \equiv 0$ e quindi la tesi.

— o — o —

Anche in questo caso posso usare classi più ristrette di funzioni

— o — o —

Esempio $\min \left\{ \int_0^2 u^2 dx : \underbrace{u(0)=0, u(2)=5, \int_0^2 u(x) dx = 7}_{\times} \right\}$

Osservo che $\mathbb{X}$ è uno spazio affine con

$$V := \{ v \in C^1([0,2]) : v(0) = v(2) = 0, \int_0^2 v(x) dx = 0 \}$$

Data $u \in \mathbb{X}$ e $v \in V$ calcolo

$$F(u+tv) = F(u) + 2t \int_0^2 u \dot{v} + t^2 \int_0^2 \dot{v}^2$$

$$\delta F(u, v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = 2 \int_0^2 u \dot{v}$$

Integrando per parti (e supponendo $u \in C^2$) troviamo

$$\delta F(u, v) = -2 \int_0^2 \ddot{u} v$$

Quindi, se u è un pto di min, deve verificare

$$\int_0^2 \ddot{u}(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in C^1([0, 2]) \quad \int_0^2 v(x) dx = 0$$
$$v(0) = v(2) = 0$$

$$\text{Lemma DBR} \Rightarrow \ddot{u}(x) \equiv \text{cost.} \Rightarrow u(x) = ax^2 + bx + c$$

Imponendo le 3 condizioni $u(0) = \dots$, $u(2) = \dots$, $\int_0^2 u = \dots$
trovo i valori a, b, c .

La vera dimostrazione si fa poi con la disuguaglianza

— 0 — 0 —

Lemma DBR (altro enunciato)

$$\int_a^b f(x) \dot{v}(x) dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty((a, b)) \Rightarrow f(x) \equiv \text{cost in } [a, b]$$

Dim. Basta osservare che le funzioni del tipo $\dot{v}(x)$ con
 $v \in C_c^\infty$ sono tutte e sole le $w \in C_c^\infty$ a media nulla

— 0 — 0 —

Esercizi Cosa posso concludere se

$$\textcircled{1} \int_a^b f v = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty \quad \text{t.c.} \quad \int_a^b v = 2017 \quad f \equiv 0$$

$$\textcircled{2} \int_a^b f \ddot{v} = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty \quad f(x) = ax + b$$

Oss. Stiamo con questi lemmi cercando l'ortogonale in
 $L^2(a, b)$ di un certo sottoinsieme V .