

Variatione prima di un funzionale

(Derivata prima del funzionale)

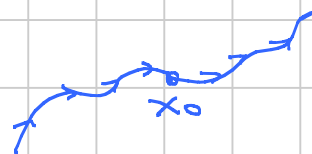
Mega-generale: $\mathbb{X}$ insieme, $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$

x_0 p.to di minimo

$\delta > 0$ e $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{X}$ tale che $\gamma(0) = x_0$

Posso considerare la funzione composta

$$(-\delta, \delta) \ni t \rightarrow F(\gamma(t)) =: \varphi(t) \in \mathbb{R}$$



Allora $\varphi: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ e $t=0$ è un p.to di minimo.

Potrei $\delta F(x_0, \gamma) := \varphi'(0)$ posto che esista

↑
variazione
prima

Variatione prima del funzionale F nel p.to x_0 lungo la curva γ

la posso def. in ogni x_0 (anche non di min) e per ogni curva γ con $\gamma(0) = x_0$ purché $\varphi'(0)$ esista.

Teorema

Se $x_0 \in \argmin \{F(x) : x \in \mathbb{X}\}$, allora per ogni γ

$$\delta F(x_0, \gamma) = 0 \quad \text{quando esiste}$$

— o — o —

Supponiamo ora che $\mathbb{X}$ sia uno spazio affine con spazio vettoriale di riferimento V .

In particolare

$$\forall u \in \mathbb{X}, \forall v \in V \text{ si ha che } u+v \in \mathbb{X}$$

In questo caso, dati $u_0 \in \mathbb{X}$ e $v \in V \setminus \{0\}$ posso considerare la curva

$$t \rightarrow u_0 + tv \quad (\text{retta per } u_0 \text{ con direz. } v)$$

e calcolare

$$\delta F(u_0, v) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u_0 + tv) - F(u_0)}{t}$$

$$= \varphi'(0) \text{ con } \varphi(t) = F(u_0 + tv)$$

"DERIVATA DIREZIONALE" o "ALLA GATEAUX"

— o — o —

$$F(u) = \int_a^b u(x)^2 dx$$

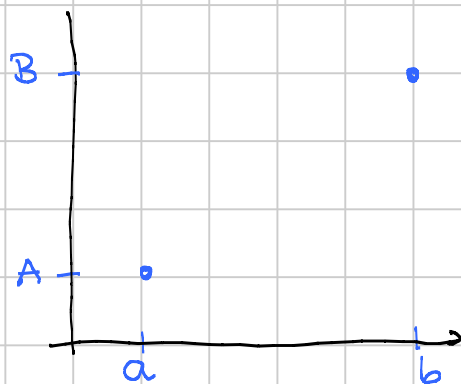
$$G(u) = \int_a^b |u(x)| dx$$

$$H(u) = \int_a^b |u(x)|^{1/2} dx$$

$$\mathbb{X} = \{ u \in C^1([a,b]) : u(a) = A, u(b) = B \}$$

Oss. $\mathbb{X}$ è uno spazio affine
con sp. vett. di riferimento

$$V := \{ v \in C^1([a,b]) : v(a) = v(b) = 0 \}$$



Prendiamo il primo funzionale, e calcoliamo $\delta F(u, v)$

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= F(u + tv) = \int_a^b (\dot{u} + t\dot{v})^2 \\ &= \int_a^b \dot{u}^2 + 2t \int_a^b \dot{u}\dot{v} + t^2 \int_a^b \dot{v}^2\end{aligned}$$

$$\delta F(u, v) := \varphi'(0) = \boxed{2 \int_a^b \dot{u}\dot{v}} \quad \text{1ª forma integrale della variazione prima}$$

Posso integrare per parti e riscrivere come

$$2 [\dot{u}v]_a^b - 2 \int_a^b \ddot{u}v$$

$$2 (\underbrace{\dot{u}(b)}_{0} v(b) - \underbrace{\dot{u}(a)}_{0} v(a)) \quad , \quad \text{quindi}$$

$$\delta F(u, v) = \boxed{-2 \int_a^b \ddot{u}v} \quad \text{2ª forma integrale della variazione prima}$$

Oss. Ho usato qui che $u \in C^2([a, b])$

Per quanto detto, se u_0 è un p.to di min. allora per forza

$$\boxed{\int_a^b \dot{u}_0 \dot{v} = 0 \quad \forall v \in V} \quad \text{1ª forma int. di (ELE)}$$

e se fosse pure C^2 allora

$$\boxed{\int_a^b \ddot{u}_0 v = 0 \quad \forall v \in V} \quad \text{2ª forma integrale di (ELE)}$$

Sembra ragionevole dedurre che $\ddot{u}_0(x) \equiv 0$, quindi $u_0(x)$ è la retta che congiunge i dati al bordo.

In bella copia forniamo la dim. rigorosa.

Sia $u_0(x)$ la retta. Sia $w(x)$ un qualunque altro elem. di $\mathbb{X}$. Allora

$$v = w - u_0 \in V \quad (\text{si annulla in } a \text{ e } b)$$

e

$$\begin{aligned} F(w) &= F(u_0 + v) = \int_a^b (\ddot{u}_0 + \ddot{v})^2 \\ &= \underbrace{\int_a^b \ddot{u}_0^2}_{F(u_0)} + 2 \underbrace{\int_a^b \ddot{u}_0 \ddot{v}}_{=0} + \underbrace{\int_a^b \ddot{v}^2}_{\geq 0} \geq F(u_0) \end{aligned}$$

$$\int \ddot{u}_0 \ddot{v} = \underbrace{[\ddot{u}_0 v]_a^b}_0 - \underbrace{\int_a^b \ddot{\ddot{u}}_0 v}_0 = 0$$

Ho dim. che $F(w) \geq F(u_0)$ e vale l'uguale $\Leftrightarrow \int_a^b \ddot{v}^2 = 0$

$\Leftrightarrow \ddot{v}(x) \equiv 0 \Leftrightarrow v(x) = \text{costante}$, ma è nulla in a e b
e quindi $\Leftrightarrow v(x) \equiv 0 \Leftrightarrow w(x) \equiv u_0(x)$

Quindi la retta è l'unico p.to di min.

$\ddot{u}_0(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$

Forma diff. di (ELE)

ELE: eq. di Eulero - Lagrange.

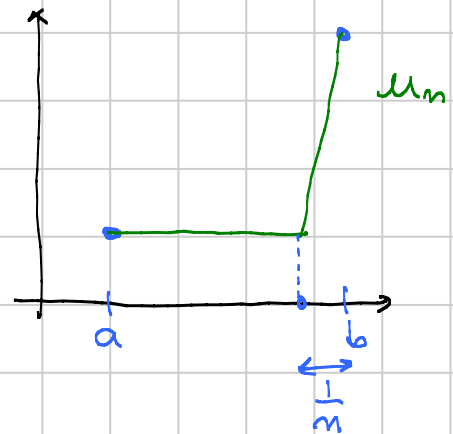
— o — o —

Passiamo ad $H(x)$. Dico che $\inf H = 0$ e non è minimo a meno del caso banale $A = B$

$$H(u_m) = \int_{b-\frac{1}{m}}^b |u_m(x)|^{1/2} dx$$

$$= \int_{b-\frac{1}{m}}^b |(B-A)m|^{1/2} dx$$

$$= |B-A|^{1/2} \sqrt{m} \cdot \frac{1}{m} \rightarrow 0$$



Non sarebbe C^1 , ma un piccolo raccordo costa davvero poco

Più in generale, fare l'inf. in C^1 , $C^{2\gamma}$, C^∞ o C^1 a tratti viene sempre la stessa cosa



— o — o —

Con il funzionale $G(u)$ abbiamo che il minimo esiste ed i p.ti di minimo sono tutte le u monotone.

Supponiamo WLOG (without loss of generality) che $B > A$. Allora

$$\int_a^b |u(x)| dx \geq \left| \int_a^b u(x) dx \right| = |u(b) - u(a)| = B - A$$

e vale il segno di uguale $\Leftrightarrow u(x)$ ha segno costante.

Idea per il futuro

- Lagrangiana stretta. convessa in q $\rightsquigarrow$ 😊
- " non convessa $\rightsquigarrow$ 😞 GUAI
- " convessa ma non stretta $\rightsquigarrow$ 😞
grossi rischi
per unicità e
regolarità

— o — o —