

Calcolo delle variazioni: studio pbm. di minimo

$X = \text{insieme}$ $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (talvolta $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$)

$\min \{ f(x) : x \in X \}$
 $\uparrow$
 minimo valore

$\operatorname{argmin} \{ f(x) : x \in X \}$
 $\uparrow$
 p.ti $x \in X$ dove f vale il min.

- ① Metodo indiretto
 - ② " diretto
 - ③ Rilassamento
 - ④ Gamma-convergenza
- + so esempi finali

Esempio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 - 4x$

Metodo indiretto: $f'(x) = 2x - 4$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$
 $x = 2$ è il p.to di min, e il min. vale $f(2) = -4$

Provo a dim. che $f(x) \geq -4$ sempre:

$$x^2 - 4x \geq -4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0$$

$\uparrow$
 ok e
 vale $\Leftrightarrow x=2$

Metodo diretto: dim. che il min. esiste, ad esempio usando Weierstrass generalizzato

Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua + $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ esiste min.

Ora che so che esiste posso vedere dove $f'(x) = 0$ come sopra.

Esempio

$$\min \{ (x^2 - 2)^2 : x \in \mathbb{Q} \}$$

In questo caso il min. non esiste, il che pone 2 domande

① chi è l'inf?

② come sono fatte le succ. minimizzanti, cioè le succ. $\{x_n\} \subseteq X$ t.c.

$$f(x_n) \rightarrow \inf \{ f(x) : x \in X \}$$

Risposta: $\inf = 0$ e le succ. min. hanno una s.succ. che tende a $\pm\sqrt{2}$.

Rilassamento: $\rightarrow$ estendere una funzione ad un ambiente più vasto

$\rightarrow$ cambiare la funzione in modo che il minimo abbia più prob. di esistere

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 - 2)^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 2017 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Esempio Consideriamo una famiglia di pbm. di minimo

$$m_n := \min \{ e^{x^2} + \arctan x + n \sin^2 x : x \in \mathbb{R} \}$$

Domande: $\rightarrow$ a cosa tende m_n quando $n \rightarrow +\infty$?

$\rightarrow$ " " tendono i pti di min. quando $n \rightarrow +\infty$?

Ci aspettiamo

$$m_n \rightarrow m_\infty := \min \{ e^{x^2} + \arctan x : x = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \}$$

Ci aspettiamo lo stesso dei pti di min.

— o — o —

Negli esempi "veri" $\mathbb{X}$ è uno spazio di funzioni, in generale di dimensione infinita. Le funzioni:

$$F: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{o } \overline{\mathbb{R}})$$

le chiameremo funzionali perché l'argom. è una funzione

$$F(u) = \int_2^4 (\dot{u}^2 + \sin u) dx \quad \mathbb{X} := C^1([2,4])$$

$$\min \left\{ \int_2^4 [\dot{u}(x)^2 + u(x)^2] dx : \boxed{u \in C^1([2,4]), u(2)=3} \right\}$$

definiscono un insieme $\mathbb{X}$

Funzionali integrali

$$F(u) := \int_a^b L(x, u(x), \dot{u}(x)) dx$$

dove $L: [a,b] \times \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{X}}}{\mathbb{R}} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{U}}}{\mathbb{R}} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \dot{\mathbb{U}}}}{\mathbb{R}}$

$L(x, s, p)$
 $\uparrow$ Lagrangiana

Generalizzazioni

$$F(u) := \int_a^b L(x, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots) dx$$

Dipendenza da deriv.
di ordine sup

$$F(u, v) := \int_a^b L(x, u, v, \dot{u}, \dot{v}) dx$$

$$u: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$\uparrow$ 1 variabile in partenza

Problemi + complicati

$\rightarrow$ più variabili in partenza $u: \overset{\mathbb{R}^n}{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$

$\rightarrow$ " " " " e arrivo (caso vettoriale)

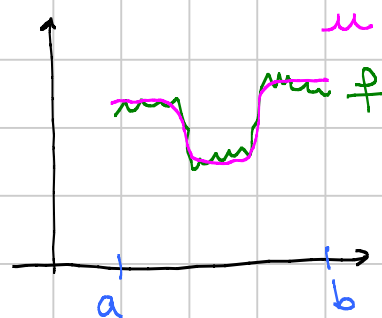
Esempio classico 1

Data una funzione $f(x)$, trovare

$$\min \left\{ \int_a^b [\underbrace{u^2 + (u-f)^2}_{u \text{ vicino ad } f}] dx : u \in C^1([a,b]) \right\}$$

$\uparrow$
 u non troppo brutta

u non troppo brutta



Esempio classico 2

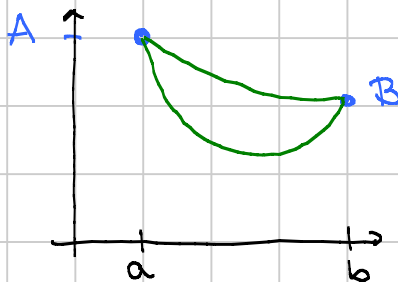
$$\min \left\{ \int_a^b (u'^2 + u) dx : u(a) = A \quad u(b) = B \quad u \in C^1 \right\}$$

dati

Pensiamo a come una corda

- tenere basso $i\dot{u}^2$ vuol dire tenere bassa l'energia elastica
- tenere basso u vuol dire min. l'energia potenziale

- tenere basso u vuol dire min. l'energia potenziale



Variante : $\min \left\{ \int_a^b (\ddot{u}^2 + \dot{u}^2 + u) dx : \text{come prima} \right\}$
↑ ↑
curvature allungare

curvare

↑
allungare

In generale: problemi di minimo per funzionali integrali
per funzioni di una variabile
L'incognita è

L'incognita è

$$\mu: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

o talvolta

$$\mu: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Non parleremo: $\rightarrow$ funzionali per funzioni di più variabili

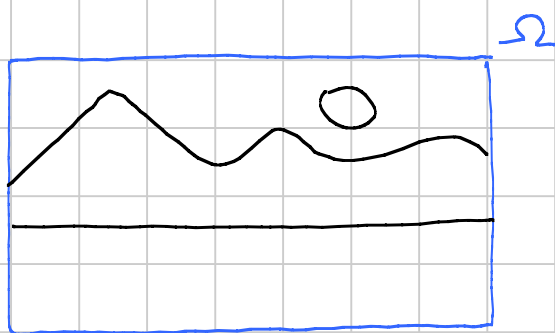
$\rightarrow$ problemi geometrici, ad esempio pbm. in cui Ω incognita è un insieme, ad esempio

$$\min \{ \text{lunghezza}(\partial E) : \underbrace{E \subseteq \mathbb{R}^2, \text{Area}(E) = \tau}_{\times} \}$$

$\rightarrow$ problemi con interazioni tra funzioni e insiemi, ad esempio

$$MS(u, k) := \int_{\Omega \setminus k} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega \setminus k} |u - f|^2 + \text{lunghezza}(k)$$

f è una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$
 $k \subseteq \Omega$



f = fotografia "brutta"
 u = fotografia "bella"
 k = contorni delle figure

MUMFORD - SHAH 1989