

MODICA - MORTOLA

ALLEN - CAHN

CAHN - HILLARD

Problema

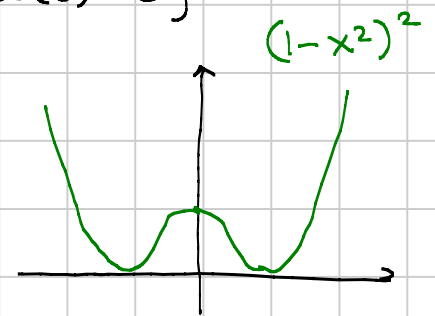
$$I_\varepsilon = \min \left\{ \varepsilon^2 \int_0^1 \dot{u}^2 dx + \int_0^1 (1-u^2)^2 dx : u(0)=0 \right\}$$

$$\min \left\{ \varepsilon^2 \int_0^1 (\dot{u}^2 + \cos u) dx : u(0)=0 \right\}$$

↑

i "pozzi" sono in $\pm k\pi$

$$\min \left\{ \int_0^1 (\dot{u}^2 + m \cos u) dx : u(0)=0 \right\}$$



DOPPIO PEZZO

Conflicto: u vorrebbe essere ± 1 (o $\pm \pi$ con il $\cos$), ma parte da 0 e deve pagare su $\dot{u}$.

Sembra ragionevole sospettare che $I_\varepsilon \rightarrow 0$

La u a fianco per ε piccolo garantisce I_ε piccolo.



Domanda: come tende a 0 I_ε ? Se u_ε minimizza ad ε fisso, come si comporta u_ε ?

Oss. L'esistenza del minimo per ε fisso è gratis con il metodo diretto.

Esercizio (facile) $\Gamma\text{-}\lim F_\varepsilon(u) = \int_0^1 (1-u^2)^2 dx$
 " $\int \varepsilon^2 \dot{u}^2 + (1-u^2)^2$

$$\varepsilon \int_0^1 \left[\varepsilon \dot{u}^2 + \frac{1}{\varepsilon} (1-u^2)^2 \right] dx$$

F_ε

Minimizzare il pbm. iniziale equivale a minimizzare il nuovo F_ε e questo ha un Γ -limite non banale, che non potrò calcolare

$$\textcircled{1} \min \{ F_\varepsilon(u) : u(0)=0 \} \geq c > 0$$

$\uparrow$
indipendente da ε

Si usa il trucco della media aritmetica - geometrica

$$\varepsilon A^2 + \frac{1}{\varepsilon} B^2 \geq 2 |A| \cdot |B|$$

Ma allora

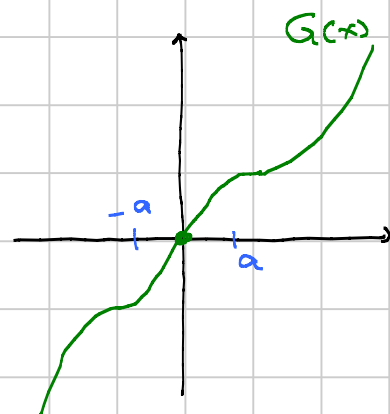
$$\int_0^1 \varepsilon \dot{u}^2 + \frac{1}{\varepsilon} (1-u^2)^2 \geq 2 \int_0^1 |\dot{u}| \cdot |1-u^2| dx = (*)$$

Considero la funzione $G(x)$ tale che $G(0)=0$ e $G'(x)=|1-x^2|$

Osservo che $G(x)$ è strett. monotona

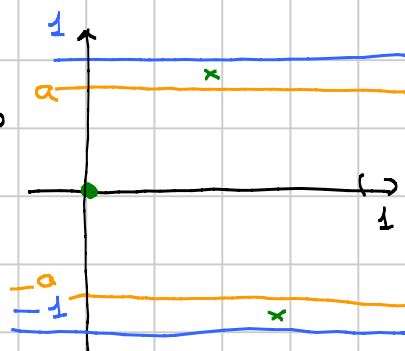
Ora

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\dot{u}| \cdot |1-u^2| dx &= \int_0^1 \left| \frac{d}{dx} G(u(x)) \right| dx \\ &\geq |G(u(1)) - G(u(0))| \end{aligned}$$



$\textcircled{2}$ Fissiamo una costante $a \in (0,1)$.

Allora per ε piccolo ogni minimo $u_\varepsilon(x)$ assume almeno un valore fuori dall'intervallo $(-a,a)$



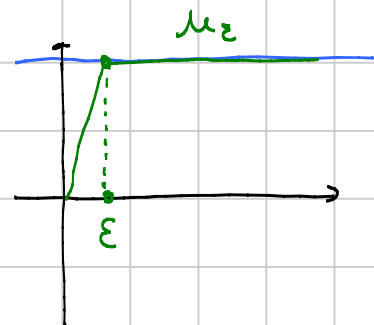
1.5 Esiste una costante M indipendente da ε tale che

$$\min \{ F_\varepsilon(u) : u(0) = 0 \} \leq M \quad \forall \varepsilon$$

$$\int \varepsilon \dot{u}^2 + \frac{1}{\varepsilon} (1-u^2)^2 \leq M$$

$u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$ su un tratto lungo ε , quindi

paga $\int_0^\varepsilon \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} = 1 \leftarrow$ limitato



Idem sul secondo pezzo $\int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} (1-u^2)^2 \leq 1$

Dim di ② Se per assurdo fosse $|u(x)| \leq a < 1$ sempre, allora sarebbe $|1-u^2|^2 \geq b > 0$ sempre, quindi

$$F_\varepsilon(u) \geq \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} b \quad \text{e questo diverge, contro l'ipotesi che } u_\varepsilon(x) \text{ sia pto di min.}$$

③ Per ogni $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo $\exists x_\varepsilon \in (0,1)$ t.c. $u_\varepsilon(x_\varepsilon) \notin [-a,a]$

Quindi ragionando come nel pto ① abbiamo

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq |G(u(x_\varepsilon)) - G(u(0))| \geq \text{costante fissa strett. positiva}$$

④ $I_\varepsilon \sim \varepsilon G(1)$, che è come dire che

$$\min \{ F_\varepsilon(u) : u(0) = 0 \} = G(1)$$

Dim. Abbiamo dimostrato che per ogni $a \in (0,1)$ vale la stima

$\min \{F_\varepsilon\} \geq G(a)$ per ε piccolo,
quindi

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \min \{F_\varepsilon(u)\} \geq G(a) \quad \forall a \in (0,1)$$

Usando che a è arbitrario $\liminf \geq G(1)$.

Resta da far vedere la disug. opposta. Torniamo a

$$\varepsilon A^2 + \frac{1}{\varepsilon} B^2 \geq 2|A| \cdot |B|$$

Vale il segno di = se $\sqrt{\varepsilon} A = \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} B$, cioè $A = \pm \frac{1}{\varepsilon} B$

cioè nel nostro caso $\Leftrightarrow u = \pm \frac{1}{\varepsilon}(1-u^2)$

Questa è una equaz. che posso risolvere

$$\frac{du}{1-u^2} = \pm \frac{1}{\varepsilon} dx \quad ; \quad \arctanh u = \pm \frac{1}{\varepsilon} x + k$$

Se voglio $u(0) = 0$ prendo $k=0$ e ottengo $u(x) = \pm \tanh \frac{x}{\varepsilon}$

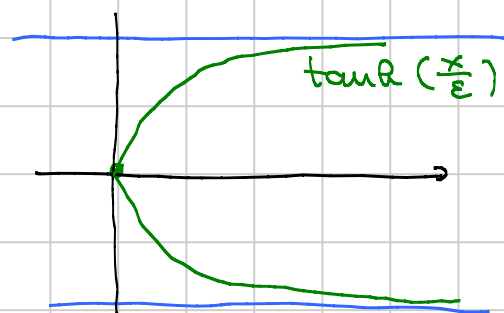
Conseguenza: facendo il conto con

$$u_\varepsilon(x) = \tanh \frac{x}{\varepsilon}$$

ottego

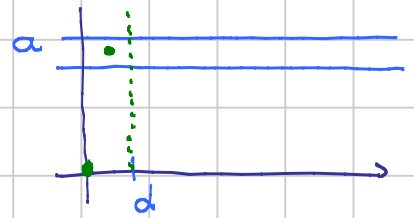
$$\limsup F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq G(1)$$

↑
non sto dicendo che sia il
pto di minimo, ma quasi



- ⑤ Si può dimostrare che, detta $u_\varepsilon(x)$ una famiglia di pti di minimo (che possiamo supporre ≥ 0), si avrà
 $u_\varepsilon(x) \rightarrow 1$ unif in $[\alpha, 1]$ per ogni $\alpha > 0$.

Idea Fissato $a \in (0,1)$ per ε piccolo
 si avrà che $u_\varepsilon(x) \in (a,1)$
 per almeno un valore di $x \in (0,2)$



Inoltre è facile vedere che u_ε è monotona...

— o — o —

Ma noi non possiamo... chi è il T -limite di F_ε ?

→ È finito solo sulle u che valgono ± 1 in tutti i punti
 tranne un numero finito

→ Su queste vale

numero salti $\cdot 2G(1)$

↑
 costo di fare una
 transizione da -1
 a $+1$ e viceversa

— o — o —
 — o — o —

