

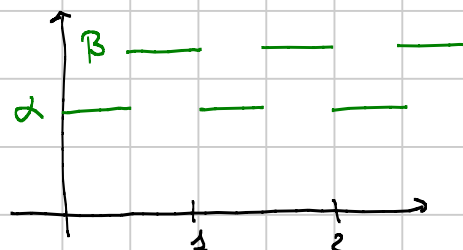
OMOGENIZZAZIONE

Esempio $a: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ $a(x) = \begin{cases} \alpha & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta & x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$

Estendiamo $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ per periodicità.

Poniamo

$$a_n(x) := a(nx)$$



La funzione $a_n(x)$ alterna α e β con periodo $\frac{1}{n}$. (GRECCE)

Per $n \rightarrow \infty$ cosa fa $a_n(x)$? Non converge puntualmente, unif., fortemente, ma

quindi anche in L^p

$$a_n(x) \rightharpoonup a_\infty(x) \quad \text{debole in } L^1((a,b))$$

per ogni (a,b) intervallo

dove $a_\infty(x) \equiv \frac{\alpha + \beta}{2}$

Dim. Basta verificare che su ogni intervallo (c,d) (anche solo ad estremi razionali) si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^d a_n(x) dx = (d-c) \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Esempio analogo $a_n(x) = \sin(nx)$ oppure $a_n(x) = \sin^2(nx)$

Con facili conti si ottiene convergenza debole in $L^1((a,b))$ a

$$\sin(nx) \rightarrow 0$$

$$\sin^2(nx) \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\sin^4(nx) \rightarrow \frac{3}{8}$$

Achtung! La convergenza debole non commuta con la composizione, quindi

$$a_n(x) \rightarrow a_\infty(x) \quad \not\Rightarrow \quad \varphi(a_n(x)) \rightarrow \varphi(a_\infty(x))$$

NO
anche se φ è continua.

Primo esempio di analog.

$$F_n(u) = \int_0^1 u^2 + a_n(x) u^2 dx$$

$a_n(x)$ = greche dell'esempio 1

$$u(0) = u(1) = 0$$



Ci aspettiamo che

$$F_n(u) \rightarrow F_\infty(u) = \int_0^1 u^2 + a_\infty(x) u^2 dx$$

Questo è vero sotto ipotesi molto generali: basta che $a_n \rightarrow a_\infty$.

Dim Tutto standard. L'unico punto è che se

$$u_n(x) \rightarrow u_\infty(x) \quad \text{unif.}$$

$$u_n(x) \rightarrow u_\infty(x) \quad \text{debole in } L^\infty$$

allora

$$\liminf F_n(u_n) \geq F_\infty(u_\infty)$$

Sul 1o termine sono i soliti discorsi, per il secondo serve che

$$\int_0^1 a_n(x) u_n^2(x) dx \rightarrow \int_0^1 a_\infty(x) u_\infty^2(x) dx$$

$$\int a_\infty u_\infty^2 - a_n u_n^2 = \int a_\infty u_\infty^2 - a_n u_\infty^2 + \int a_n u_\infty^2 - a_n u_n^2$$

$$= \int u_\infty^2 (a_\infty - a_n) + \int a_n (u_\infty^2 - u_n^2)$$

↓
per conv. debole

$$\leq \int |a_n| |u_\infty^2 - u_n^2|$$

↓
liminf

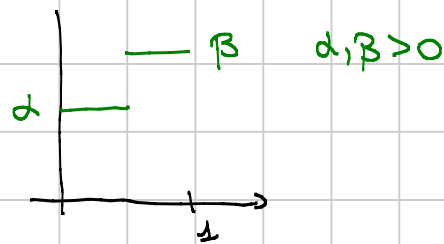
Secondo esempio di omogeneizzazione

$$F_n(u) = \int_0^1 a_n(x) \dot{u}^2 + u^2$$

Basta calcolare il Γ -limite di $F_n(u) = \int_0^1 a_n(x) \dot{u}^2 dx$

PROBLEMA DI CELLA = vedere cosa accade in un periodo

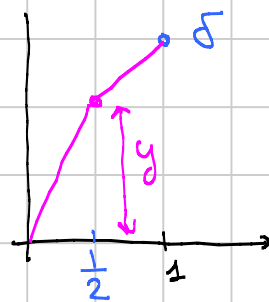
$$\int_0^1 a(x) \dot{u}^2 dx$$



Risolvere il problema

$$\min \left\{ \int_0^1 a(x) \dot{u}^2 dx : u(0) = 0, u(1) = \delta \right\}$$
$$= \int_0^{1/2} \alpha \dot{u}^2 dx + \int_{1/2}^1 \beta \dot{u}^2 dx$$

Si tratta di minimizzare



$$\alpha (2y)^2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} [2(\delta - y)]^2 \beta$$

$$= 2\alpha y^2 + 2\beta (\delta - y)^2 \leadsto \cancel{4\alpha} y - \cancel{4\beta} (\delta - y) = 0$$

$$(\alpha + \beta) y = \beta \delta \quad y = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \delta$$

$$\delta - y = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \delta$$

$$\min = \left[2\alpha \frac{\beta^2}{(\alpha + \beta)^2} + 2\beta \frac{\alpha^2}{(\alpha + \beta)^2} \right] \delta^2$$

$$= 2 \frac{\alpha \beta (\alpha + \beta)}{(\alpha + \beta)^2} \delta^2 = \boxed{\frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}} \delta^2$$

↑
Media armonica
di α e β

$$= \left(\frac{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}{2} \right)^{-1}$$

Il minimo sarebbe stato lo stesso per $F(u) = \int_0^1 \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} \dot{u}^2$

In maniera analoga posso fare il problema su un intervallo di lunghezza $l > 0$ con dati al bordo

$$u(0) = A \quad u(l) = B$$

$$\text{Viene } \min u = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \cdot l \left(\frac{B-A}{l} \right)^2 = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \frac{(B-A)^2}{l}$$



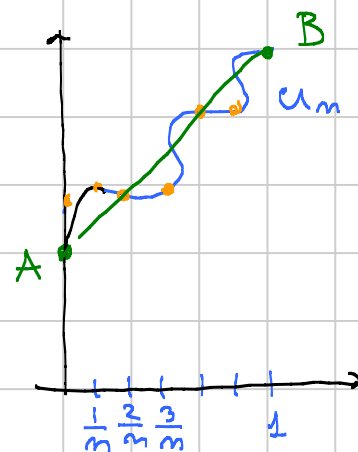
Il problema di cella aiuta a fare il Gamma limite nel caso delle reti, cioè se u è affine (e questo basta per farlo per tutte le $u \dots$).

Il punto fondamentale è che se

$$u_n(x) \rightarrow u_\infty(x)$$

allora

$$\liminf F_n(u_n) \geq F_\infty(u_\infty)$$



Considero i valori che $u_n(x)$ assume nei punti del tipo $\frac{k}{n}$

$$F_n(u_n) = \int_0^1 a_n(x) \dot{u}_n^2(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} a_n(x) \dot{u}_n^2(x) dx$$

Problema di cella con B.c. in $\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}$, quindi lo posso stimare dal basso

$$\geq \sum_{k=1}^n \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \underbrace{\left(u_n\left(\frac{k}{n}\right) - u_n\left(\frac{k-1}{n}\right) \right)^2 \cdot n}$$

$$n \sum A_k^2 \geq \left(\sum A_k \right)^2$$

$$\geq \frac{2\alpha\beta}{2+\beta} \left(\sum_{k=1}^n u_n\left(\frac{k}{n}\right) - u_n\left(\frac{k-1}{n}\right) \right)^2$$

$$= \frac{2\alpha\beta}{2+\beta} (u_n(1) - u_n(0))^2$$

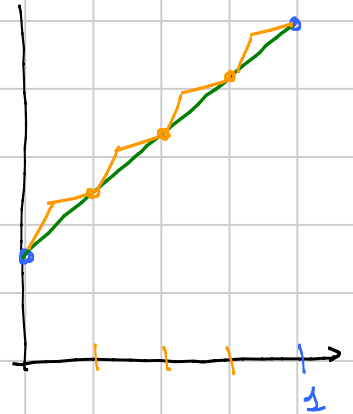
Quando $n \rightarrow \infty$ il RHS $\rightarrow F_{\infty}(u_{\infty})$

Questo dimostra il liminf nel caso $u_{\infty} =$ funzione affine.

Per ottenere la recovery sequence, devo costruire $u_n(x)$ usando in ogni intervallo di lunghezza $\frac{1}{n}$ la soluzione del pbm. di cella

Così ho uguaglianza in ogni intervallo.

— o — o —



Si poteva notare che entrava la media armonica

$$\int a_n(x) u^2 dx \leadsto \text{Eq. Eulero } (2a_n(x)u)' = 0$$

$$\leadsto 2a_n(x)u' = c \leadsto u' = \frac{c}{2a_n(x)}$$

quindi mi ritrovavo ad integrare $\frac{1}{a_n(x)} \leadsto$ media armonica.

— o — o —