

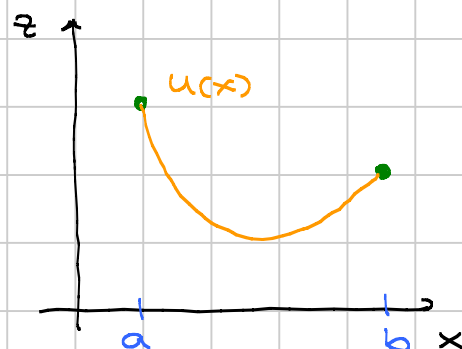
HEAVY CHAIN (Catenaria)

- 1 Problema: trovare la posizione di equilibrio di una catena INESTENSIBILE di lunghezza data l sospesa tra due punti dati (a, A) e (b, B)

Tende a stare più in basso possibile, quindi a minimizzare

$$F(u) = \int_a^b u \sqrt{1+u'^2} dx$$

proporzionale a coord z del baricentro della catena



con il vincolo di lunghezza, cioè $G(u) = \int_a^b \sqrt{1+u'^2} dx = l$ dato ↓

Notazione

- approccio NON PARAMETRICO: la catena è pensata come grafico
- approccio PARAMETRICO: la catena è pensata come curva $(x(t), z(t))$ con $t \in \text{intervallo}$

$$\min \{ F(u) : u \in C^1([a, b]), u(a) = A, u(b) = B, G(u) = l \}$$

2 Equazione di Eulero Uso i moltiplicatori di Lagrange.

→ u è stazionario per $G(u) \Leftrightarrow$ risolve Eulero per $G(u)$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} = \text{cost}$$

↑
costante w.r.t u

$$\Leftrightarrow u' = \text{cost}$$

$$\Leftrightarrow u \text{ retta}$$

$$\Leftrightarrow u = \text{cangiungente}$$

→ u è stazionario per $F(u) - \lambda G(u)$ per un opportuno $\lambda \in \mathbb{R}$.
 Scrivo Eulero in forma Erdmann $\psi(s, p) = S\sqrt{1+p^2} - \lambda\sqrt{1+p^2}$
 $= (S-\lambda)\sqrt{1+p^2}$

A meno di cambiare $u \rightarrow \lambda$ con u ottengo la stessa soluz.
 del problema delle sup. di rotazione. Quindi

$$u(x) = c \cos R \left(\frac{x}{c} + k \right) + \lambda$$

Devo imporre 3 condizioni

$$c \cos R \left(\frac{a}{c} + k \right) + \lambda = A, \quad c \cos R \left(\frac{b}{c} + k \right) + \lambda = B$$

più la lunghezza che si calcola

$$\int_a^b \sqrt{1+u'^2} dx = \int_a^b \left\{ 1 + \sin^2 R \left(\frac{x}{c} + k \right) \right\}^{1/2} dx = \int_a^b \cos R \left(\frac{x}{c} + k \right) dx$$

$$= c \left[\sin R \left(\frac{x}{c} + k \right) \right]_a^b = l$$

Non è chiaro se il sistema ha esistenza / unicità, neanche restringendosi ai soli $c > 0$.

3) Caso speciale $a = -1, b = 1, A = B \rightsquigarrow$ forza $k = 0$

$$c \cos R \frac{1}{c} + \lambda = A$$

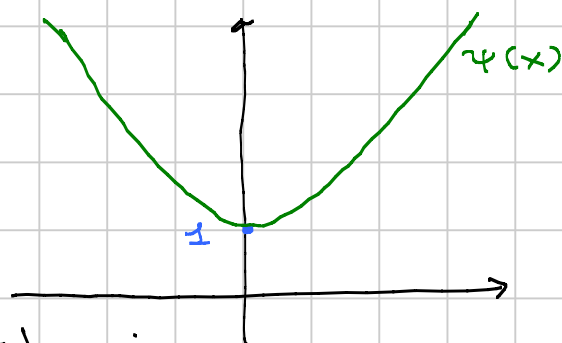
$$2c \sin R \frac{1}{c} = l$$

$$c \sin R \frac{1}{c} = \frac{l}{2}$$

La seconda dice

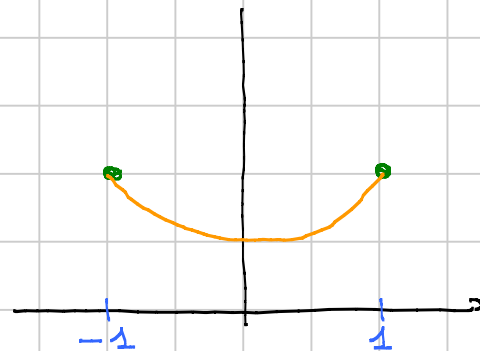
$$\frac{\sin R \frac{1}{c}}{\frac{1}{c}} = \frac{l}{2}$$

$$\psi(x) = \frac{\sin R x}{x}$$



Se $\frac{l}{2} > 1$ (ragionevolissimo) ci sono 2 c buoni,
 uno positivo, uno negativo.

Si potrebbe verificare che è la sol.
che tocca all'esterno l'involuppo
di tutte le costanti che ora
si dirama dal pto $(0, \lambda)$.



Questo dice solo che è SLM per il
lemma trivial sui moltiplicatori di
Lagrange.

- ④ Se io sapessi che $F(u)$ assume max/min tra tutte le u
che verificano BC + vincolo $G(u) = l$, saprei che le due
costanti trovate sono pti di min/max globali.
Il problema è come sempre la crescita.
Se avessi crescita diversa

$$\min \left\{ \int_a^b \cos u (1 + \dot{u}^2) dx : \int_a^b \dot{u}^2 = l + B.C. \right\}$$

Su questo è applicabile il metodo diretto, MA...

... prendiamo una succ. minimizzante u_n , il vincolo + BC
ci dà compattezza gratis, quindi a meno di s.succ.

$$u_n \rightarrow u_\infty \text{ unif} \quad \dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty \text{ deb.}$$

quindi il vincolo NON PASSA AL LIMITE.

Si by-passa in modo standard rilassando il vincolo ad
una disuguaglianza

$$\int_a^b \dot{u}^2 \leq l$$

Con questo vincolo ottengo esistenza del minimo e poi dimostro
che il pto di min satura il vincolo, cioè lo usa tutto. Se
così non fosse cambio la l in modo da diminuire il
funzionale.

⑤ Impostiamo il pbm. in maniera parametrica

$$\min \left\{ \int_a^B z(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt : \int_a^B \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt = L \right. \\ \left. + B.c. \right\}$$

Dopo aver osservato che gli integrali sono indep. dalla parametrizzazione, posso scegliere di parametrizzare le curve con la lung. d'arco

$$[0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Il problema diventa

$$\min \left\{ \int_0^L z(t) dt : \dot{x}^2(t) + \dot{z}^2(t) = 1 \quad \forall t \in [0, L] + B.c. \right\}$$

Ora con il metodo diretto ottengo l'esistenza sia del min sia del max ma devo rilassare il vincolo a ≤ 1 (bisogna passare al limite come nella def. sui pbm. con ostacolo).

È banale che i p.ti di min/max saturano il vincolo.

Oss. 1 Il rilassato del funz. con vincolo $= 1$ è lo stesso funzionale con vincolo ≤ 1 .

Oss. 2 Un problema che Γ -converge a questo è

$$\min \left\{ \sum_{k=0}^n z_k : (x_0, z_0) = (a, A), (x_n, z_n) = (b, B) \right.$$

$$\left. \text{dist}((x_k, z_k), (x_{k-1}, z_{k-1})) = \frac{L}{n} \quad \forall k \right\}$$

— o — o —