

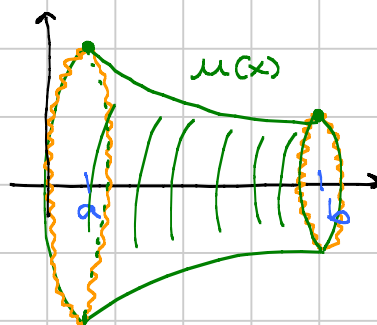
SUPERFICI DI ROTAZIONE

 (di area minima)

1 Formulazione del problema

$[a, b]$ intervallo, $A > 0$, $B > 0$

Cerco una curva passante per (a, A) e (b, B) che generi una sup. di area minima.



$$\text{Area sup} = 2\pi \int_a^b u \sqrt{1 + \dot{u}^2} dx$$

$F(u)$

Problema : $\min \{ F(u) : u \in C^1([a, b]), u(a) = A, u(b) = B, u(x) \geq 0 \forall x \in [a, b] \}$

Pessima notizia : crescita lineare in i $\leadsto$ addio metodo diretto

2 Equazione di Eulero $\psi(x, s, p) = s \sqrt{1 + p^2}$

$$i \psi_p(u, \dot{u}) = c + \psi(u, \dot{u})$$

$$\frac{\dot{u}^2}{\sqrt{1 + \dot{u}^2}} u = c + u \sqrt{1 + \dot{u}^2} ; \quad \cancel{\dot{u}^2} u = c \sqrt{1 + \dot{u}^2} + u (1 + \cancel{\dot{u}^2})$$

$$\sqrt{1 + \dot{u}^2} = -\frac{u}{c} \quad \leadsto \quad 1 + \dot{u}^2 = \frac{u^2}{c^2} \quad \leadsto \quad \dot{u}^2 = \frac{u^2}{c^2} - 1$$

$$\leadsto \dot{u} = \pm \sqrt{\frac{u^2}{c^2} - 1} \quad \text{questa si risolve}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{\frac{u^2}{c^2} - 1}} = \int \pm dx = \pm x + k$$

Per integrare al LHS pongo $u = cv$, $du = c dv$

$$\int \frac{du}{\sqrt{\dots}} = \int \frac{c dv}{\sqrt{v^2 - 1}} = \pm x + k ; \arccos v = \frac{x}{c} + k$$

$$\leadsto v = \cos R \left(\frac{x}{c} + k \right)$$

Quindi le soluzioni dell'eq. di Eulero sono

$$u(x) = c \cos R \left(\frac{x}{c} + k \right)$$

A posteriori si può verificare sostituendo che sono tutte e sole le soluzioni di Eulero

3) Impongo le DBC Per semplicità, anzi wlog, suppongo $a=0$

$$c \cos R k = A$$

$$c \cos R \left(\frac{b}{c} + k \right) = B$$

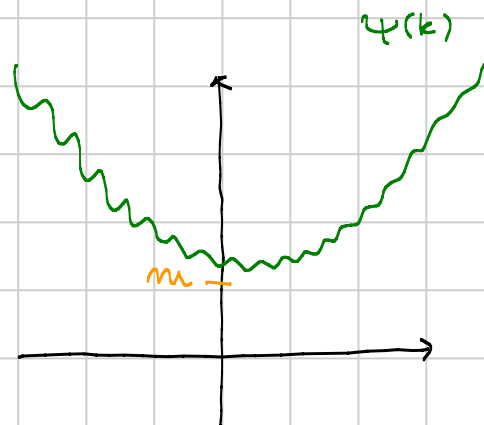
$$\leadsto c = \frac{A}{\cos R k} \quad (>0)$$

$$\frac{A}{\cos R k} \cos R \left(\frac{b}{A} \cos R k + k \right) = B$$

$$\leadsto \underbrace{\frac{1}{\cos R k} \cdot \cos R \left(\frac{b}{A} \cos R k + k \right)}_{\psi(k)} = \frac{B}{A}$$

Ora $\psi(k) > 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \psi(k) = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow -\infty} \psi(k) = +\infty$$



Ne segue che $\psi(k)$ ha un minimo assoluto che è positivo m .

Quindi

- Se $\frac{B}{A} < m$, allora NON ci sono soluzioni
- Se $\frac{B}{A} > m$, allora ci sono almeno due soluzioni (e si potrebbe dimostrare che sono esattamente due).

— o — o —

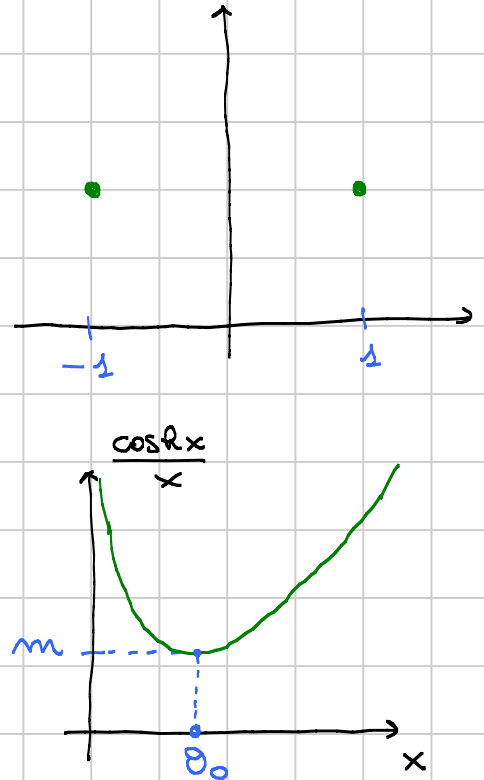
4 Caso speciale $A = B$, $a = -1, b = 1$

$$\left. \begin{aligned} c \cosh\left(\frac{1}{c} + k\right) &= A \\ c \cosh\left(-\frac{1}{c} + k\right) &= A \end{aligned} \right\} \leadsto k = 0$$

$$c \cosh \frac{1}{c} = A$$

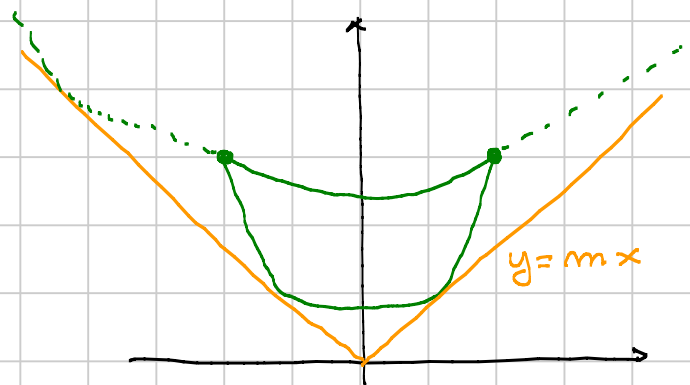
$$\frac{\cosh \frac{1}{c}}{\frac{1}{c}} = A \quad \frac{\cosh x}{x} = A$$

- $A < m \leadsto$ nessuna soluzione
- $A = m \leadsto$ una soluzione
- $A > m \leadsto$ due soluzioni.



Se le condizioni fossero $u(\pm a) = A$ la cond. sarebbe $A > am$

Si verifica che quando ci sono due soluzioni una tocca $y = m|x|$ in due punti interni, una la tocca in due punti esterni



5 Famiglia di catenarie

$u_c(x) = c \cosh \frac{x}{c}$. Queste coprono tutta la zona $y \geq m|x|$ ($c > 0$)

Fissato $x > 0$, i possibili valori sono

$$c \cosh \frac{x}{c} = x \frac{c}{x} \cosh \frac{x}{c} = x \frac{\cosh \frac{x}{c}}{\frac{x}{c}} \geq mx$$

$\geq m$

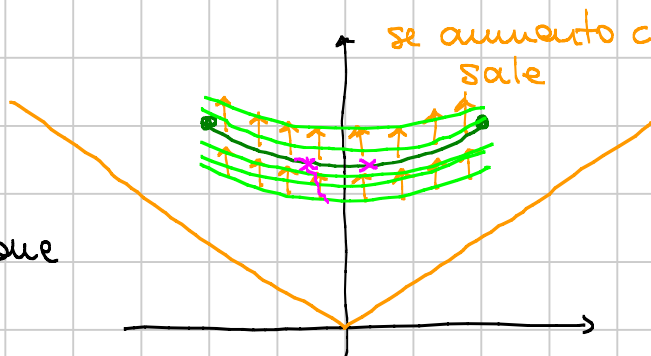
Dato $c > 0$ esiste un unico $x_0 > 0$ per cui $c \cosh \frac{x_0}{c} = mx_0$
ed è quello per cui $\frac{x_0}{c} = \theta_0$

6 Famiglia di estremali

Dato $A > 0$ consideriamo la soluzione
"con contatto esterno". Per valori
vicini di c avrò soluzioni vicine.

Quindi la soluzione è contenuta in un campo di estremali,
quindi per lo meno risulta SLM.

Se l'intervallo spaziale è abbastanza piccolo, allora è pure GM



Basta verificare che non ha convenienza ad uscire dal "campo"
Posso stimare il costo di uscita con un facile conto

$$\int_a^b u \sqrt{1+u'^2} dx \geq \int_a^b u u' dx \geq \frac{1}{2} [u^2(b) - u^2(a)]$$

↑

dipende dall'ampiezza del
campo ed è $>$ valore del
funzionale se a e b sono
abbastanza vicini.

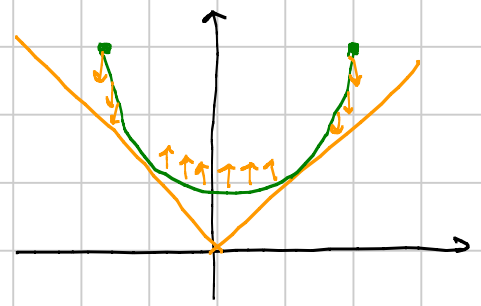
Quindi ogni funzione che esce dal campo ha $F(u) > F(\text{catenaria})$
e quindi non è minimo.

[Ho usato qui che ψ è convessa wrt p .

Occhio: $\psi(s, p) = s \sqrt{1+p^2}$ non è convessa nella coppia
 (s, p)].

Per la catenaria che tocca un valgano
i discorsi appena fatti.

Non riesco a fare un campo come si
deve variando solo c
→ tra aria di pti coniugati.



7] Cosa succede per $A < m$
Nessuna soluzione di Eulero

Sorpresa (non dimostrata): la soluzione sono le
due basi del cilindro!

