

BRACHISTOCRONA (CONTINUAZIONE)

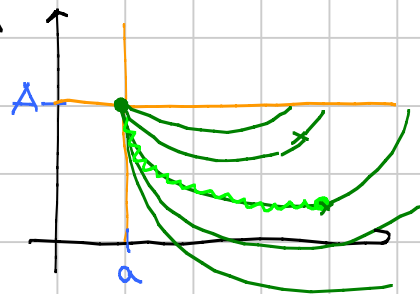
- 6 MINIMALITÀ Dimostrare che l'unica cicloide che passa per le Bc è effettivamente un minimo.

Due approcci

- ① teoria dei campi (calibrazione)
- ② trucco di convessità

- ① Si tratta di riempire il quadrante $x > a, y < A$ fibrandolo con soluzioni di Eulero, cioè con cicloidi che passano per (a, A) .

L'eccesso di Weierstrass è ≥ 0 ovunque perché $\psi(x, s, p)$ è convessa nel quadrante wrt p .



Cautela Finora abbiamo sempre calibrato usando un pto base che non fosse il dato iniziale.

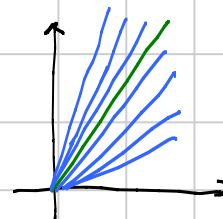
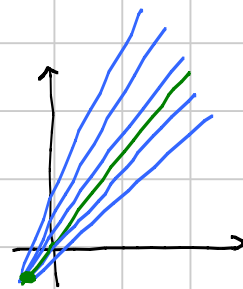
Qui sarebbe come se volessi calibrare i minimi di

$$\int_0^1 \dot{u}^2 dx$$

usando le soluzioni passanti per $(0,0)$

$$\leadsto p^2 \geq 2p \frac{s}{x} - \frac{s^2}{x^2}$$

il che produce integrali impropri (che comunque si gestiscono)



② $\psi(x, s, p) = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{A-s}}$ non è convessa in (p, s)

Ma con un cambio di variabili $A-u = \frac{1}{2} v^2$ abbiamo

$$u = A - \frac{1}{2} v^2 \leadsto \dot{u} = v \dot{v} \text{ e quindi}$$

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1+\dot{u}^2}}{\sqrt{A-u}} dx = \int_a^b \sqrt{\frac{1+v^2 \dot{v}^2}{v^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \int_a^b \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{1}{v^2}} dx$$

e con un conto di analisi 2 si vede che

$$\psi(x, s, p) := \sqrt{p^2 + \frac{1}{s^2}} \text{ è convessa in } (s, p).$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} \\ \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} \end{array}$$

LEMMA (Lemma trivial con moltip. Lagrange)

Contesto: $\min \{ F(x) : x \text{ tali che } G(x) = \text{costante} \}$

Metodo moltiplicatori $\leadsto$ gli eventuali p.ti di min. soddisfano

$$\nabla F(x_0) = \lambda \nabla G(x_0)$$

Cioè sono p.ti stazionari per $F(x) - \lambda G(x)$ per un ben determinato valore $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lemma Se per un certo $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha che x_0 minimizza $F(x) - \lambda G(x)$, allora

$$F(x_0) = \min \{ F(x) : G(x) = G(x_0) \}$$

(nel suo livello di G il pto x_0 minimizza $F(x)$)

Dim. Per ogni x tale che $G(x) = G(x_0)$ vale

$$F(x) - \lambda G(x_0) = F(x) - \lambda G(x) \geq F(x_0) - \lambda G(x_0)$$

$\uparrow$ $G(x) = G(x_0)$ $\uparrow$ ipotesi

Semplifico $\lambda G(x_0)$ e ho la tesi.
— 0 — 0 —

Problema classico Minimizzare il perimetro ad area fissata

$$\min \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{1+u^2} dx : \int_{-1}^1 u(x) dx = m \right\}$$

$\uparrow$ data > 0

$u(-1) = u(1) = 0$

$\underbrace{\int_{-1}^1 \sqrt{1+u^2} dx}_{\text{lunghezza grafica}}$



Idea: usare i moltiplicatori con

$$F(u) = \int_{-1}^1 \sqrt{1+u^2} dx \quad G(u) = \int_{-1}^1 u dx$$

Seccatura: crescita lineare di F wrt u .

Dai moltiplicatori di Lagrange avremo che

$$\rightarrow \delta G(u) = 0$$

$\rightarrow$ esiste λ tale che u è soluzione di Eulero per $F(u) - \lambda G(u)$

Il 1° caso non si pone perché l'eq. di Eulero di $G(u)$ è

$$0 = 1$$

$\downarrow$ $(\psi_p)'$ $\downarrow$ ψ_s

$$\psi(x, s, p) = s$$

Nel 2° caso abbiamo $\psi(x, s, p) = \sqrt{1+p^2} - \lambda s$, quindi

$$\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \right)' = -\lambda, \text{ da cui } \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = -\lambda x + k$$

Provo a risolvere

$$u = (-\lambda x + k) \sqrt{1+u^2} \leadsto u^2 = (-\lambda x + k)^2 (1+u^2)$$

$$u^2 [1 - (-\lambda x + k)^2] = (-\lambda x + k)^2$$

$$u = \pm \frac{(-\lambda x + k)}{\sqrt{1 - (-\lambda x + k)^2}} \quad \text{si potrebbe risolvere ...}$$

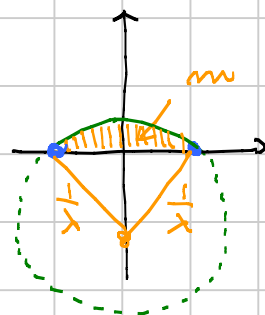
Se moltiplico per u : $u u' = \pm \frac{(-\lambda x + k)}{\sqrt{1 - (-\lambda x + k)^2}}$

$$\left(\frac{1}{2} u^2 \right)' = \left(-\frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - (-\lambda x + k)^2} \right)'$$

... facendo i conti giusti dovrebbe venire

$$\lambda^2 u^2 + (-\lambda x + k)^2 = 1$$

$\leadsto u$ è una circonferenza di raggio $\frac{1}{\lambda}$



$\leadsto$ restano da trovare le coordinate del centro.

Il centro sarà sull'asse y (quindi $k=0$) ed essere tale che l'area sottesa sia m .

Brutta sorpresa Ci riesco solo per valori piccoli di m , cioè per

$$0 \leq m \leq \frac{\pi}{2} \quad \leftarrow \text{caso della semicirconferenza.}$$

Riassumendo

$\rightarrow$ per $m > \frac{\pi}{2}$ Eulero non ha soluzioni !!! Quindi il minimo non esiste !!!

→ per $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ esiste un'unica soluzione di Eulero, che è un arco di circonferenza.

Sarà un minimo?

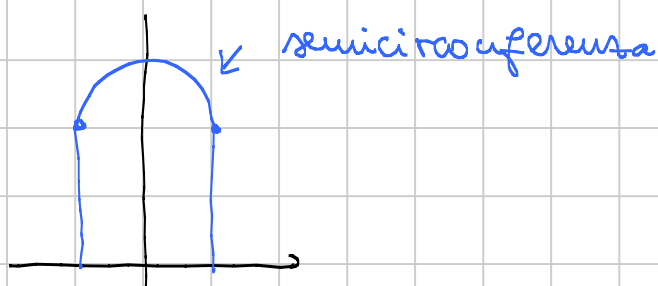
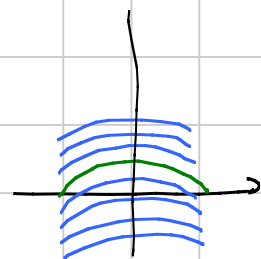
Per il lemma trivial basta che sia un minimo per

$$F - \lambda G = \int_0^1 (\sqrt{1 + \dot{u}^2} - \lambda u) dx$$

ma questo è convesso in (s, p) $\psi(x, s, p) = \sqrt{1 + p^2} - \lambda s$

In alternativa, fissato λ tutte le traslate dell'arco buono risolvono Eulero e riempiono tutte, quindi calibrano

Congettura Per $u > \frac{\pi}{2}$ l'inf è raggiunto da



— o — o —