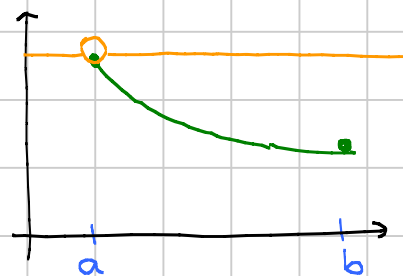


PROBLEMA CLASSICO: LA BRACHISTOCRONA

Problema. dati due punti in un piano verticale (a, A) , (b, B) con $a < b$, $A > B$ determinare il profilo di una "guida" in maniera tale che una pallina ci metta il minor tempo possibile per andare da (a, A) a (b, B) sotto l'effetto della gravità e partendo da ferma.



1) **MODELLO** $\mu: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $\mu(a) = A$, $\mu(b) = B$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [0, T] \quad y(t) = \mu(x(t))$$

Dalla meccanica: energia cinetica + potenziale = costante

$$\frac{1}{2} [\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)] + g y(t) = g A$$

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = 2g(A - y(t))$$

D'altra parte $\dot{y}(t) = \dot{\mu}(x(t)) \dot{x}(t)$, quindi

$$\dot{x}^2(t) [1 + \dot{\mu}^2(x(t))] = 2g(A - \mu(x(t))) \quad \forall t \in [0, T]$$

da cui

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2g(A - \mu(x(t)))}{1 + \dot{\mu}^2(x(t))}}$$

il segno + è ragionevole perché la pallina va verso dx

Porto tutto a sx

$$\sqrt{\frac{1 + \dot{x}^2(x(t))}{A - u(x(t))}} \dot{x}(t) = \sqrt{2g} \quad \forall t \in [0, T]$$

Integro a dx e sx tra 0 e T

$$\sqrt{2g} T = \int_0^T \sqrt{\frac{1 + \dot{x}^2(x(t))}{A - u(x(t))}} \dot{x}(t) dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{\frac{1 + \dot{x}^2(s)}{A - u(s)}} ds$$

Pongo $s = x(t)$
 $ds = \dot{x}(t) dt$

Quando $t=0 \rightsquigarrow s=a$
 $t=T \rightsquigarrow s=b$

Minimizzare T equivale a minimizzare

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{\sqrt{A - u}} dx$$

tra tutte le $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $u(a) = A$, $u(b) = B$.

Seccature:

① $\sqrt{1+p^2}$ è convessa MA a crescita lineare $\rightsquigarrow$ abolito metodo diretto.

② L'integrale è improprio, quindi per cominciare ci restringiamo alle

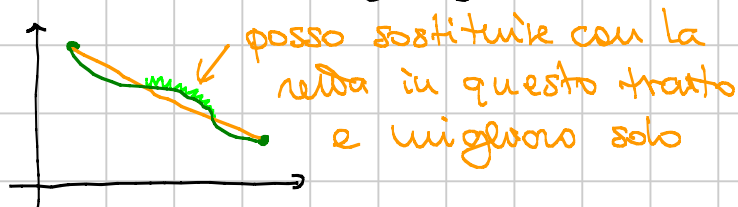
$$u \in C^1((a, b))$$

$$u(x) < A$$

$$\forall x \in [a, b]$$

↑
qui non
chiedo nulla

Oss / esercizio Si può dimostrare che la soluzione (posto che esista) sta sotto la retta congiungente



2) EQUAZIONE DI EULERO

$$\psi(x, s, p) = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{A-s}}$$

In forma Erdmann è $\dot{u} \psi_p(u, \dot{u}) = C + \psi(u, \dot{u})$

$$\frac{\dot{u}^2}{\sqrt{1+\dot{u}^2}} \frac{1}{\sqrt{A-u}} = C + \frac{\sqrt{1+\dot{u}^2}}{\sqrt{A-u}}$$

$$\cancel{\dot{u}^2} = C \sqrt{1+\dot{u}^2} \sqrt{A-u} + \cancel{1+\dot{u}^2} \leadsto \sqrt{1+\dot{u}^2} \sqrt{A-u} = C$$

In brutal mode ricavo $\dot{u}$:

$$1+\dot{u}^2 = \frac{C^2}{A-u} \leadsto \dot{u}^2 = \frac{C^2}{A-u} - 1 \leadsto \dot{u} = \pm \sqrt{\frac{C^2 - (A-u)}{A-u}}$$

Questa si può risolvere

$$\int \frac{\sqrt{A-u}}{\sqrt{C^2 - (A-u)}} du = \int \pm dx = \pm x + k$$

devo fare l'integrale al LHS

3) Cambi di variabile

$$A-u = c^2 y$$

$$-du = c^2 dy$$

$$\int \frac{\sqrt{A-u}}{\sqrt{C^2 - (A-u)}} du = \int \frac{\cancel{c} \sqrt{y}}{\cancel{c} \sqrt{1-y}} (-c^2 dy) = \pm x + k$$

$$\int \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1-y}} dy = \pm \frac{1}{c^2} x + k$$

Pongo $y = \sin^2 z$

$$\int \frac{\sin z}{\cancel{\cos z}} 2 \sin z \cancel{\cos z} dz = \pm \frac{1}{c^2} x + k$$

$$= \int 2 \sin^2 z dz = \int [1 - \cos(2z)] dz = z - \frac{1}{2} \sin(2z) = \frac{2z - \sin(2z)}{2}$$

Ultimo cambio $2z = \theta$

$$\theta - \sin \theta = \pm \frac{2}{c^2} x + k$$

Cosa lega u a θ : $u = A - c^2 y = A - c^2 \sin^2 z$

$$= A - \frac{c^2}{2} \cdot 2 \sin^2 z = A - \frac{c^2}{2} (1 - \cos \theta)$$

Conclusione:

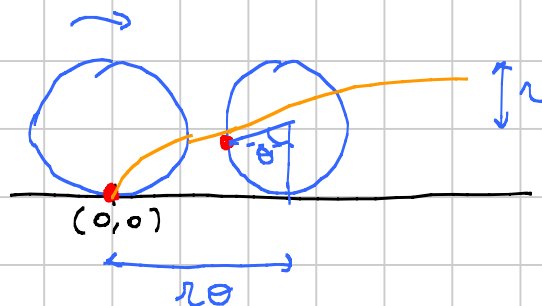
$$x = \frac{c^2}{2} (\theta - \sin \theta) + k$$

$$u = A - \frac{c^2}{2} (1 - \cos \theta)$$

Rappresentazione parametrica: se voglio $u(x)$ devo ricavare θ in funzione di x dalla prima (non si può con le funzioni elementari), poi sostituire nella seconda.

4 CICLOIDI

Curva descritta da un punto su una circ. che ruota



Quando la circ. ha percorso un angolo θ , le coord. del punto sono

$$r(\theta - \sin \theta)$$

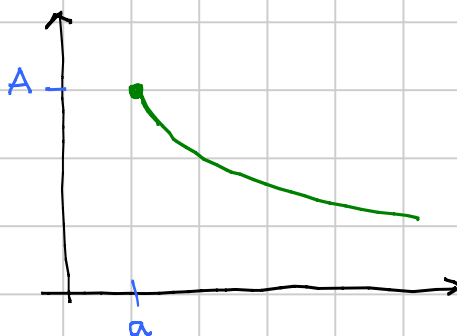
$$r(1 - \cos \theta)$$

Alla fine quella al punto ③ è una cicloide rovesciata con $r = \frac{c^2}{2}$ e partente dal punto (a, A) ($k=a$)

Oss. $\theta - \sin \theta$ è strett. crescente.

Volendo si può verificare che la cicloide risolve veramente Eulero.

Domanda: esistenza /unicità della cicloide che passa ANCHE per (b, B) .



5) Seconda BC

$$x = a + (\theta - \sin \theta) r$$

$$u = A - r (1 - \cos \theta)$$

Voglio trovare r in maniera tale che esista θ con

$$b = a + r (\theta - \sin \theta)$$

$$b - a = r (\theta - \sin \theta)$$

$$B = A - r (1 - \cos \theta)$$

$$B - A = +r (\cos \theta - 1)$$

Dividendo

$$\frac{\cos \theta - 1}{\theta - \sin \theta} = \frac{B - A}{b - a} \leq 0$$

$\underbrace{\theta - \sin \theta}_{g(\theta)} \quad \underbrace{b - a}_{> 0}$

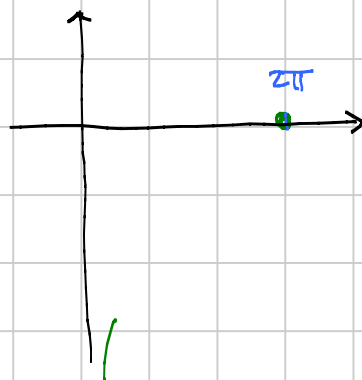
Spero che $g: (0, 2\pi] \rightarrow (-\infty, 0]$ sia bigettiva

Studio la funzione:

$$\rightarrow g(2\pi) = 0$$

$$\rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0^+} g(\theta) = -\infty$$

$$\rightarrow g'(\theta) = \frac{-\sin \theta (\theta - \sin \theta) + (1 - \cos \theta)^2}{(\dots)^2}$$



Il numeratore è

$$\begin{aligned} & -\theta \sin \theta + \sin^2 \theta + 1 + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \\ & = \underbrace{2 - 2 \cos \theta - \theta \sin \theta}_{\varphi(\theta)} \geq 0 \end{aligned}$$

$$= 2(1 - \cos \theta) - \theta \sin \theta \geq 0$$

Per $\theta \in [\pi, 2\pi]$ è vera. Basta controllare in $[0, \pi]$. In 0 vale 0

$$\varphi'(\theta) = 2 \sin \theta - \sin \theta + \theta \cos \theta = \sin \theta - \theta \cos \theta \geq 0$$

Se $\varphi'(\theta) \geq 0$ sempre ho finito. Per $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ è ok

Per $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ posso dividere e diventa

$$\tan \theta \geq \theta \quad \text{che è ok in } (0, \frac{\pi}{2}). \quad !!!$$