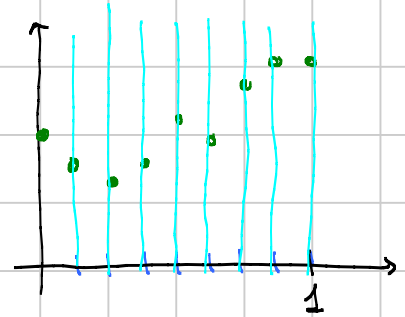


PASSAGGI DISCRETO $\rightarrow$ CONTINUO

Esempio Approssimare la derivata con il rapporto incrementale.

Suddivido l'intervallo $[0,1]$ in n parti uguali.

Definisco u solo nei punti della suddivisione.



$u_0, u_1, \dots, u_n$ valori negli estremi $(n+1)$ numeri

Se questi valori sono pensati come campionamenti (SAMPLE) di una funzione u , allora

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{\frac{1}{n}}$$

approssima la derivata

$$\underbrace{\int_0^1 u^2(x) dx}_{\text{continuo}}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{u_k - u_{k-1}}{\frac{1}{n}} \right)^2$$

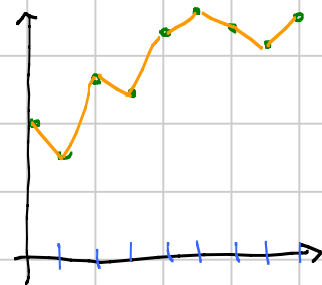
↑
lung. degli
intervallini

Idea: c'è Γ -convergenza, ma in che senso visto che LHS e RHS sono definiti su insiemi diversi.

Dico che una successione di funzioni "discrete" (cioè definite solo in una suddivisione) converge ad una funzione continua in un senso opportuno se le estese affini o costanti a tratti convergono.

Formalmente

$$F(u) = \begin{cases} \int_0^1 \dot{u}^2 dx & \text{se } u \in H^1(0,1) \\ +\infty & \text{se } u \in L^2 \setminus H^1 \end{cases}$$



$$F_n(u) = \begin{cases} \int_0^1 \dot{u}^2 dx & \text{se } u \text{ è affine su tratti lunghi } \frac{1}{n} \\ +\infty & \text{se } u \in L^2 \setminus \text{quelle affini come sopra} \end{cases}$$

Allora $\underbrace{F_n(u)}_{\substack{\downarrow \\ \text{coincide con la} \\ \text{sommatoria della} \\ \text{pagina precedente}}} \xrightarrow{\Gamma} F(u) \quad \text{in } L^2 \text{ (in } C^0 \text{ sarebbe uguale)}$

Dim. LIMINF Data $u_n \rightarrow u_\infty$ in L^2 devo verificare che
 $\liminf F_n(u_n) \geq F(u_\infty)$

Se $\liminf = +\infty$, c'è poco da fare. Altrimenti, a meno di s.succ., posso supporre $F_n(u_n) \leq M$, cioè $\|u_n\|_{L^2} \leq M$.

La convergenza in L^2 aggiunge un controllo su u_n .

Al solito modo

$$u_n(x) \rightarrow u_\infty(x) \quad \text{unif.}$$

$$\dot{u}_n(x) \rightarrow \dot{u}_\infty(x) \quad \text{debole } L^2$$

Si chiude come sempre (la norma è SCI)

LIMSUP Data u qualunque, trovare $u_n \rightarrow u$ in L^2 t.c.

$$\limsup F_n(u_n) \leq F(u)$$

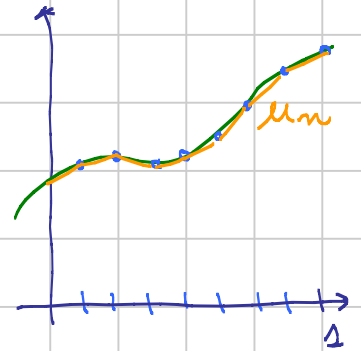
Basta farlo quando $F(u) < +\infty$. Basta farlo in un denso in

energia per F , ad esempio in C^1 . Ora per le $u \in C^1$ basta "unire i tratti", cioè approx in maniera ovvia

$$\int_0^1 \dot{u}_n^2 \rightarrow \int_0^1 \dot{u}^2$$

Questo è l'uniforme continuità di $\dot{u}$?

— o — o —



Oss. Dopo aver dimostrato questo, abbiamo che H^1 si caratterizza come l'insieme delle funzioni su cui il T-limite delle $F_n(u)$ è finito.

Allo stesso modo si può definire $W^{1,p}$.

— o — o —

Equazione di Eulero nel discreto

u vettore $(n+1)$ -dim.

$$F_n(u) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{u_k - u_{k-1}}{\frac{1}{n}} \right)^2 + \gamma \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} u_k$$

$$\int_0^1 \dot{u}^2 + \gamma u$$

Supponiamo che un certo vettore / funzione minimizzi $F_n(u)$
Che cosa risolve u ?

Notazione: $D^\varepsilon u = \frac{u(x+\varepsilon) - u(x)}{\varepsilon}$

È una "derivata"

$$F_\varepsilon(u) = \int_0^1 |D^\varepsilon u|^2 + \gamma u$$

Penso u costante a tratti

$$F_\varepsilon(u+tv) = \int_0^1 |D^\varepsilon(u+tv)|^2 + \gamma(u+tv)$$

$$= \int_0^1 |D^\varepsilon u|^2 + 2t D^\varepsilon v \cdot D^\varepsilon u + t^2 (D^\varepsilon v)^2 + \gamma u + \gamma t v$$

Derivo rispetto a t e metto $f=0$. Otengo

$$\int_0^1 2 D^\varepsilon u \cdot D^\varepsilon v + f v = 0 \quad \text{1ª forma di Eulero}$$

Con i rapporti incrementali vale la formula di integrazione per parti:

$$\begin{aligned} \boxed{\int f D^\varepsilon g} &= \frac{1}{\varepsilon} \int f(x) [g(x+\varepsilon) - g(x)] dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int f(x) g(x+\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \int f(x) g(x) dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int f(x-\varepsilon) g(x) - \frac{1}{\varepsilon} \int f(x) g(x) dx \\ &= - \int g(x) \frac{f(x-\varepsilon) - f(x)}{-\varepsilon} \\ &= \boxed{- \int g(x) D^{-\varepsilon} f(x)} \end{aligned}$$

Tornando alla 1ª forma di Eulero

$$\int 2 D^\varepsilon u D^\varepsilon v + f v = \int (-2 D^{-\varepsilon} D^\varepsilon u + f) v dx$$

quindi essendo v arbitrario

$$-2 D^{-\varepsilon} D^\varepsilon u + f = 0$$

" $\frac{u(x+\varepsilon) + u(x-\varepsilon) - 2u(x)}{\varepsilon^2}$

— o — o —

Cosa succede in generale per il Gamma - limite di

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{m} \psi \left(\frac{u_k - u_{k-1}}{\frac{1}{m}} \right) = F_m(u)$$

→ Se φ è convessa e ha la crescita giusta, il Gramma-
liante è

$$F(u) = \int_0^1 \varphi(\tilde{u}) dx$$

→ Se φ ha solo la crescita, ma non la convessità, allora

$$F(u) = \int_0^1 \varphi^{**}(\tilde{u}) dx$$

— 0 — 0 —